## Antalet tillstånd i en ideal kvantgas med *N* partiklar

Detta appendix är överkurs.

Innan du går vidare bör du repetera sidorna 90 - 91 i Kvantvärldens fenomen eftersom vi kommer att utvidga resonemanget gällande för en partikel till *N* partiklar där *N* är av storleksordning Avogadros tal.

Vi utgår från att vi har *N* stycken partiklar i en kubisk kvantbiljard. Varje partikel har tre kvanttal. För partikel nr *k* gäller att kvanttalen är $(n_{kx}, n_{ky}, n_{kz})$ och att energin är

$$E_k = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\left(n_{kx}^2 + n_{ky}^2 + n_{kz}^2\right) = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} n_k^2,$$

Där vi infört beteckningen $n_k^2 = \left(n_{kx}^2 + n_{ky}^2 + n_{kz}^2\right)$. För att fullständigt beskriva tillståndet hos de *N* partiklarna krävs alltså 3*N* kvanttal. Man inser snabbt att detta är en orimlighet att ange alla dessa kvanttal – det vi ska göra och som behövs i den statistiska fysiken är att ange hur många tillstånd som finns vid en viss energi.

I den ideala gasen växelverkar inte partiklarna med varandra. Alltså är den totala energin i gasen med *N* stycken partiklar:

$$E_{n_{1x},n_{1y},n_{1z},n_{2x},n_{2y}.....} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\sum_{k=1}^{N} n_k^2.$$

Varje tillstånd är en gitterpunkt (= heltalspunkt) i det 3*N*-dimensionella kvanttalsrummet. Frågan vi ställer oss är: Hur många tillstånd finns det med energi mindre än *U*? Låt $\Gamma(U)$ vara detta antal tillstånd.

Antalet tillstånd = volymen av kvanttalsrummer med en radie mindre än

$$n = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} n_k^2} = \sqrt{\frac{2ma^2}{\hbar^2\pi^2}U}.$$

Eftersom kvanttalsrummer är 3*N*-dimensionellt ska vi beräkna volymen av en sfär i 3*N*-dimensioner. Volymen av en sfär i k dimensioner ges av

$V_k(R) = \frac{\pi^{k/2}}{(k/2)!}R^k$. (se http://en.wikipedia.org/wiki/Volume_of_an_n-ball)

Med samma metod som i tre dimensioner finner vi att

$$\Gamma(n) = \frac{\pi^{3N/2}}{(3N/2)!}n^{3N}\cdot\frac{1}{2^{3N}}.$$

Faktorn $\frac{1}{2^{3N}}$ beror på att vi enbart ska integrera över området med positiva kvanttal. Vi ersätter *n* med *U* och får:

$$\Gamma(U) = \frac{\pi^{3N/2}}{(3N/2)!}\sqrt{\frac{2ma^2}{\hbar^2\pi^2}U}^{\,3N}\cdot\frac{1}{2^{3N}}.$$

Med $V = a^3$ (gasens volym) får vi slutligen

$$\Gamma(U) = \frac{\sqrt{\pi}V^N}{(3N/2)!}\left(\frac{mU}{2\pi\hbar^2}\right)^{3N/2}.$$

I den statistiska fysiken är vi intresserade av antalet möjliga kvanttillstånd, $\Omega$ om den inre energin $U$ är given. Om vi betraktar antal tillstånd i ett intervall $(U - \Delta U, U)$ med bredden $\Delta U$ så gäller att

$$\Omega(U, \Delta U) = \Gamma(U) - \Gamma(U - \Delta U) = CU^{3N/2}.$$

Kom ihåg att N är ett mycket stort tal, vilket innebär att funktionen $U^{3N/2}$ växer oerhört snabbt. Detta innebär att

$$\Gamma(U) - \Gamma(U - \Delta U) = CU^{3N/2}\left(1 - \left(1 - \frac{\Delta u}{u}\right)^{3n/2}\right).$$

Termen $\left(1 - \frac{\Delta u}{u}\right)^{3n/2}$ är i de fall vi betraktar alltid liten. T ex anta att energin given med 5 siffrors noggrannhet då är $0.9999^{\left(10^{23}\right)} = 0$ med all rimlig noggrannhet. I ord innebär detta att funktionen $\Gamma(U)$ växer så oerhört snabbt att väsentligen alla tillstånd finns i ett mycket smalt intervall precis vid *U*. <u>Alltså är funktionen $\Omega$ oberoende av $\Delta U$.</u> Vi har hittills inte tagit hänsyn till att kvantmekaniska partiklar är identiska. Därför måste formeln för $\Omega$ kompletteras med att vi dividerar med *N*!. Slutligen får vi

$$\Omega(U) = \frac{\sqrt{\pi}V^N}{N!(3N/2)!}\left(\frac{mU}{2\pi\hbar^2}\right)^{3N/2}.$$

Med detta uttryck får vi enkelt hur entropin beror av *U*, *V*, *N*.

Sedan tillkommer en faktor som beror av spinnet. För t ex spinn-1/2 partiklar blir denna faktor 2.