Ljusfarten ur elektriska mätningar

Lars Gislén, Björn Annby-Andersson

February 10, 2021

1 Bakgrund

Ett genombrott i den klassiska fysiken var när man visade att Maxwells ekvationer är den teoretiska beskrivningen av elektromagnetismen. Det innebär att allt som kan härledas från dessa ekvationer skall kunna observeras i naturen. Ett av resultaten av ekvationerna är att det i vakuum finns lösningar i form av transversella vågor som rör sig med ljusfarten. Härvid kan ljusfarten relateras till elektriskt mätbara storheter, vi har

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}, \tag{1}$$

där ϵ_0 är permittiviteten för vakuum och μ_0 är permeabiliteten för vakuum. Din uppgift på denna laboration är att mäta ϵ_0 och μ_0 och sedan beräkna ljusfarten. Eftersom laborationen utförs på distans kommer mätdata tillhandahållas för att beräkna ϵ_0 och mätningen av μ_0 simuleras genom en Matlab-applikation.

2 Permittiviteten för vakuum, ϵ_0

För att mäta ϵ_0 använder vi en stor plattkondensator med luft mellan plattorna, se Fig. 1. Permittiviteten för luft skiljer sig ytterst lite från permittiviten för vakuum - vi kan därför utföra experimentet med luft. Avståndet mellan plattorna är d, A anger arean för respektive platta och deras omkrets är 126 cm. Med en multimeter kan vi mäta kapacitansen på kondensatorn för olika avstånd d. Vi kan även beräkna kapacitansen med följande formel,

$$C = C_0 + \epsilon_0 \frac{A}{d}, \tag{2}$$

där C_0 är en parasitkapacitans (störning). Parasitkapacitansen kan påverkas av personer som står nära kondensatorn och för att få tillförlitlig mätdata bör en inte stå för nära kondensatorn.

Fundera över följande:

1. Hur kan du beräkna A?
2. Vilka inställningar på avståndet d bör du välja när du mäter kapacitansen?
3. Vilken enhet har kapacitans? Vilken enhet får då ϵ_0?

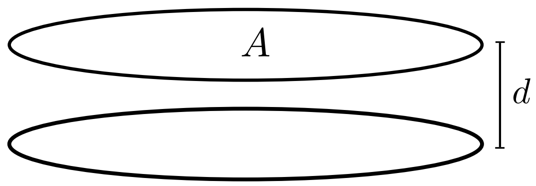

Figure 1: Plattkondensator. Plattornas avstånd kan justeras.

Eftersom vi inte känner till ϵ_0 kan vi inte beräkna kapacitansen. Vi kan endast mäta den med hjälp av en multimeter. Vid en mätning erhålls följande data,

d [mm]	3.00	4.25	5.00	6.25	8.25	10.25	11.00	12.25
C [nF]	0.608	0.506	0.503	0.418	0.380	0.360	0.344	0.353

Gör följande:

1. Hur skall du plotta mätdatan för att kunna bestämma ϵ_0 på bästa sätt?
2. Plotta datan i Matlab och hitta ϵ_0. Jämför med tabellerade värdet.
3. Hur kan du bestämma parasitkapacitansen C_0?

Diskutera frågorna i labbrapporten.

3 Permeabiliteten för vakuum, μ_0

För att mäta permeabiliteten för vakuum använder vi kretsen i Fig. 2. En tongenerator kopplas i serie med ett motstånd på 100 Ω och en spole (kallas för primärspole) med N_1 varv. Tongeneratorn genererar en sinus-signal (både ström och spänning) - när signalen passerar genom spolen uppstår ett oscillerande magnetfält, vars fältstyrka beräknas via

$$B = \frac{\mu_0 I N_1}{L}, \tag{3}$$

där I är strömmen från tongeneratorn och L är längden på primärspolen. Strömmen ges av,

$$I = \frac{\hat{U}_1}{R} \sin(2\pi f t), \tag{4}$$

där $\hat{U}_1$ är amplituden på växelspänningen över resistorn, R är resistansen på motståndet (här 100 Ω), och f är frekvensen hos signalen från tongeneratorn.

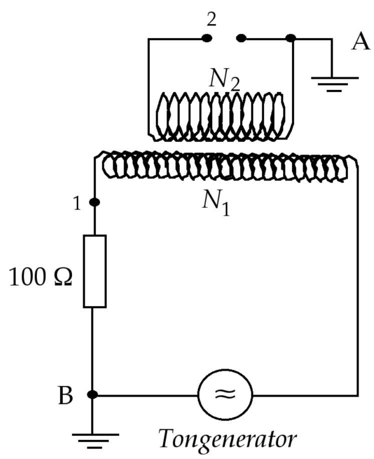

Figure 2: Krets för mätning av μ_0.

Över primärspolen är ytterliggare en spole (sekundärspole) lindad, denna har N_2 varv (se Fig. 2). Det oscillerande magnetfältet i primärspolen inducerar en växelspänning i sekundärspolen. Denna växelspänning beräknas genom

$$U_2(t) = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}, \tag{5}$$

där $\Phi = B \cdot S$ är det magnetiska flödet genom sekundärspolen, B är magnetsfältsstyrkan i primärspolen och S är tvärsnittsarean av sekundärspolen.

1. Hitta amplituden för signalen $U_2(t)$. Kalla amplituden $\hat{U}_2$.

2. Genom att använda uttrycket för $\hat{U}_2$, visa att vi kan beräkna permeabiliteten för vakuum genom

$$\mu_0 = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} \frac{LR}{2\pi f N_1 N_2 S}. \tag{6}$$

Eftersom vi inte känner till amplituderna $\hat{U}_1$ och $\hat{U}_2$ vill vi bli av med dom ur uttrycket. Vi mäter därför spänningen över motståndet genom att koppla ett oscilloskop till punkterna 1 och B i Fig. 2, och mäter spänningen över sekundärspolen genom att koppla oscilloskopet till punkterna 2 och A. För att simulera denna mätning använder vi oss av en Matlab-applikation.

1. Starta Matlab-applikationen 'Ljusfart' (installation görs genom att följa instruktionerna nedan). Försök att hitta sinussignalerna $U_1(t)$ och $U_2(t)$ genom att justera oscilloskopets y-skala och tongeneratorns frekvens.

2. När du har hittat signalerna, justera frekvensen så att amplituderna $\hat{U}_1$ och $\hat{U}_2$ är lika stora (dvs $\hat{U}_1 = \hat{U}_2$). Nu kan du beräkna μ_0 med

$$\mu_0 = \frac{LR}{2\pi f N_1 N_2 S}. \tag{7}$$

   Innerdiametern på sekundärspolen är 32 mm, $N_1 = 1054$, $N_2 = 1010$ och $L = 77$ cm.

3. Beräkna ljusfarten.

4 Installation Matlab-applikation

1. Starta Matlab.

2. Använd filhanteraren i Matlab och leta upp filen 'Ljusfart.mlappinstall' och dubbelklicka på den för att installera.

3. Efter installation hittas applikationen under fliken 'Apps'.

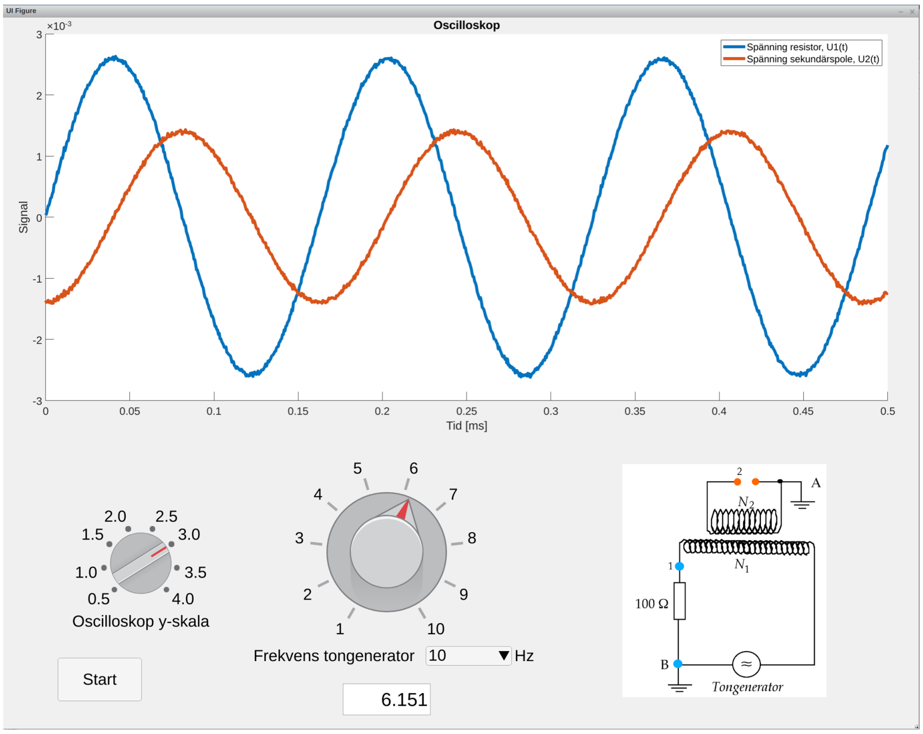

Figure 3: Gränssnitt för Matlab-applikationen.

5 Felberäkning

Vid mätningarna förekommer det mätfel eftersom labbutrustningen aldrig ger exakta resultat. Vår slutgiltiga beräkning av ljustfarten kommer därför skilja sig från det tabellerade värdet. För att uppskatta felet i vår beräkning gör vi därför en feluppskattning.

Låt oss betrakta följande fall. Vi har uppmätt en mängd fysikaliska storheter och erhållit följande mätvärden, $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Med dessa mätvärden kan vi sedan beräkna en annan fysikalisk storhet med funktionen $f(x_1, \ldots, x_n)$. För varje mätvärde kan vi uppskatta ett fel $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ och det resulternade felet Δf för funktionen $f(x_1, \ldots, x_n)$ kan uppskattas med formeln,

$$|\Delta f| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \Delta x_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \Delta x_2 + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| \Delta x_n. \tag{8}$$

Notera att denna formeln ger bäst resultat då Δx_1, Δx_2,..., Δx_n är små.

I vårat fall kan vi uppskatta felet $\Delta \mu_0$ genom att använda funktionen,

$$\mu_0(L, R, S, f, N_1, N_2) = \frac{LR}{2\pi f N_1 N_2 S}. \tag{9}$$

1. Använd Ekv. (8) för att uppskatta felet $\Delta\mu_0$ i vår beräkning av μ_0. Uppskatta också felen ΔL, ΔR, ΔS, Δf, ΔN_1, och ΔN_2.

2. För att uppskatta felet i ϵ_0 använder vi linjär regression i Matlab. Använd följande kod,

```
X = ones(length(d),2);
X(:,2) = A./d;

[b,bint] = regress(reshape(C,[length(d),1]),X);

eps0 = b(2);
fel_eps0 = abs(b(2)-bint(2,2));
```

   där A är arean på kondensatorplattorna, d är en vektor med mätvärden för plattavståndet, och C är en vektor med mätvärden för kapacitansen. Felet $\Delta\epsilon_0$ ges av variabeln 'fel_eps0'.

3. Vi kan nu använda felen $\Delta\mu_0$ och $\Delta\epsilon_0$ för att beräkna felet Δc i ljusfarten. Använd Ekv. (8) med funktionen $c(\epsilon_0, \mu_0)$ för att uppskatta Δc. Ange ditt slutgiltiga resultat på formen $c \pm \Delta c$. Är det tabellerade värdet på ljusfarten inom intervallet $(c - \Delta c, c + \Delta c)$?