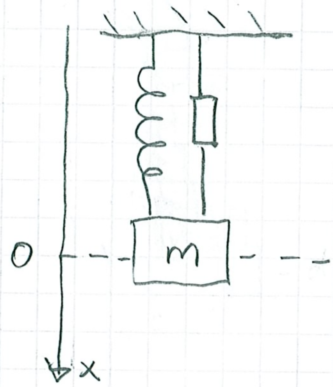
15. Diff. ekvationer I



$$F_{frik} = -\lambda v = -\lambda \frac{\partial x}{\partial t}$$

$$F_{fjäder} = -kx$$

$$N\,II \Rightarrow ma = F$$

ex, bildäck

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \lambda \frac{dx}{dt} \qquad (1)$$

Ansatz: $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \longrightarrow (1) \Rightarrow$

$$m \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)(i\omega)^2 e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} -kX(\omega)e^{i\omega t} - \lambda(i\omega)X(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \underbrace{X(\omega)\left[-m\omega^2 + k + \lambda i\omega\right]}_{f(\omega)} d\omega = 0$$

Det är endast fouriertransformen av $0 \to 0 \Rightarrow f(\omega) = 0$

$$X(\omega)\left[-m\omega^2 + k + \lambda i\omega\right] = 0$$

gånga med $\left(-\frac{1}{m}\right) \Rightarrow$ (samma form som i boken)

$$X(\omega)\left[\omega^2 - \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} - i\underbrace{\frac{\lambda}{m}}_{2\beta}\omega\right] = 0$$

$$X(\omega)\left[\omega^2 - \omega_0^2 - 2i\beta\omega\right] = 0 \qquad \text{2'a grads ekv.}$$

nollställen då $\omega = \omega_{1,2} = i\beta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

$\Rightarrow$ endast dessa frekvenser kan vara nollskilda

$$X(\omega) = A\,\delta(\omega - \omega_1) + B\,\delta(\omega - \omega_2)$$

Transformerar vi till baka

$$X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[A e^{i\omega_1 t} + B e^{i\omega_2 t} \right]$$

$$= C e^{-\beta t} e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\, t} + D e^{-\beta t} e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\, t}$$

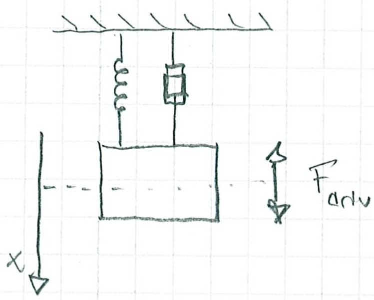
a, Ingen dämpning $\beta = 0$ $\Rightarrow$ harmoniska svängningar

b, lite dämpning $(\beta < \omega_0,\ \beta \neq 0)$ $\Rightarrow$ dämpade harmoniska svängningar

c, mycket dämpning $\beta > \omega_0$

$\Rightarrow$ exponentiell dämpning utan svängning

Lägger vi till en drivande kraft blir det roligare



$$\vec{F}_{driv} = F \cdot \sin(\Omega t)$$

För enhetens skull tar vi en komplex form: $\vec{F}_{driv} = F e^{i\Omega t}$

$$\Rightarrow \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \lambda \frac{dx}{dt} + F e^{i\Omega t}$$

Som innan $\rightarrow$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \left[\omega^2 - \omega_0^2 - 2i\beta\omega \right] e^{i\omega t} \, d\omega = -\frac{F}{m} e^{i\Omega t}$$

$$-\frac{F}{m} e^{i\Omega t} = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{F}{m}\cdot 2\pi\right)\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega-\Omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$\Rightarrow \quad X(\omega)\left[\omega^2-\omega_0^2-2i\beta\omega\right] = \left(-\frac{2\pi F}{m}\right)\delta(\omega-\Omega)$$

$$\Rightarrow \quad X(\omega) = \underbrace{\frac{\left(-\frac{2\pi F}{m}\right)\delta(\omega-\Omega)}{\left[\omega^2-\omega_0^2-2i\beta\omega\right]}}_{\text{Partikulär lösn.}} + \underbrace{\left(\text{lösn. för } F=0\right)}_{\text{homogen lösn.}}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = -\frac{F}{m}\,\frac{e^{i\Omega t}}{\Omega^2-\omega_0^2-2i\beta\Omega}$$

sätts $=0$ dvs insvängningsförloppet försummas

Svängningarnas amplitud

$$|x(t)| = \frac{F/m}{\sqrt{(\Omega^2-\omega_0^2)^2+4\beta^2\Omega^2}}$$

Denna amplitud är maximal när nämnaren har ett minimum. Detta sker för

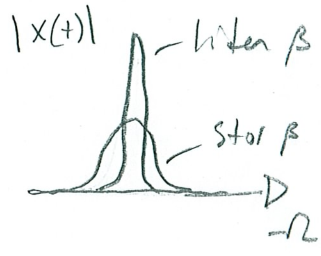
$$\Omega = \pm\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2} \quad \left(\approx \pm\omega_0 \quad \beta \ll \omega_0\right)$$

Vi har en så kallad resonans. Resonansfrekvensen ligger strax under egensvängningsfrekvensen ω_0.

Vid resonansfrekvensen har vi amplituden

$$X_{max} \approx \frac{F/m}{2\omega_0\beta}$$

Ju mindre dämpning desto högre topp



Resonans är ett vanligt fenomen.

- Gunga, man puttar i takt med resonansfrekvensen
- Vibrationer i bilar, ratten vibrerar vid vissa hastigheter

Sammanfattningsvis:

Försummas insvängningsförloppet fås lösningen till den drivna oscillatorn:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx + \lambda\frac{dx}{dt} = Fe^{i\Omega t}$$

som $x(t) = x(\Omega)\cdot e^{i\Omega t}$

dvs de svänger med den drivande kraftens frekvens.