21. Återkopplade system

Exempel Kärnkraftverk

I kärnkraftverk sker en kedjereaktion

$x(t)$ - antalet neutroner ökar exponentiellt

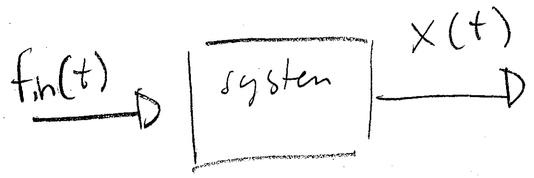
$$\frac{dx}{dt} = \lambda x \quad , \quad \lambda > 0$$

Antag att vi kan reglera reaktionen genom att plocka bort/addera ett visst antal neutroner per sekund

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x + f_{in}(t)$$

Vi antar $f_{in}(t) = -b$ dvs ett konstant antal neutroner plockas bort varje sekund $\Rightarrow$

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x - b$$



Laplacetransformering ger

$$-x(0) + sX(s) - \lambda X(s) = \frac{-b}{s}$$

$$X(s)\left[s-\lambda\right] = x(0) + \frac{-b}{s}$$

$$X(s) = \frac{x(0)}{s-\lambda} + \frac{-b}{s(s-\lambda)}$$

partialbråksuppdelning ger

$$\frac{-b}{s(s-\lambda)} = +\underbrace{R(0)}_{b/\lambda}\cdot\frac{1}{s} + \underbrace{R(\lambda)}_{-b/\lambda}\cdot\frac{1}{s-\lambda}$$

så

$$X(s) = \frac{x(0)}{s-\lambda} + \frac{b}{\lambda}\cdot\frac{1}{s} - \frac{b}{\lambda}\cdot\frac{1}{s-\lambda} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$x(t) = x(0)e^{\lambda t} + \frac{b}{\lambda} - \frac{b}{\lambda}e^{\lambda t}$$

$\frac{b}{\lambda} = x(0) \Rightarrow x(t) = x(0)$ stabil reaktion

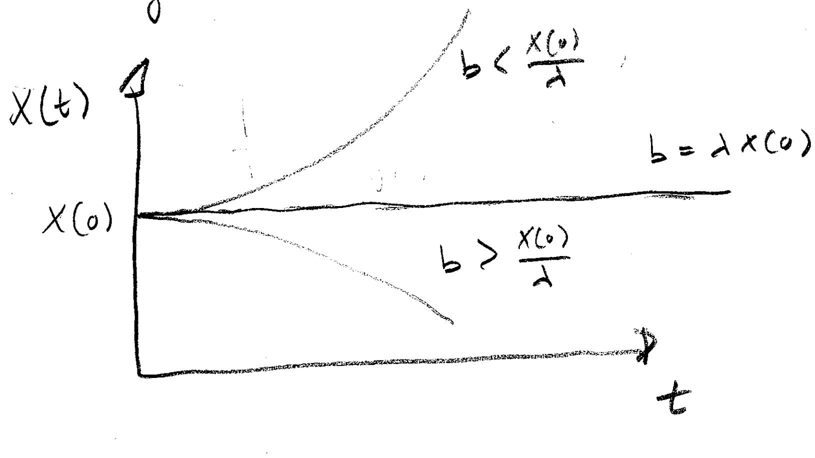
$\frac{b}{\lambda} > x(0) \Rightarrow x(t) \to 0$ reaktionen avtar

$\frac{b}{\lambda} < x(0) \Rightarrow x(t) \to \infty$ atombomb

$\Rightarrow$ väldigt känsligt för värdet på b

$\lambda > 0 \Rightarrow$ instabilt system

Kan vi göra det stabilare mha återkoppling?

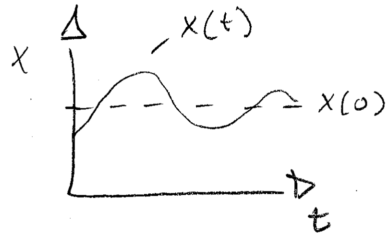


Vi vill hålla $x(t) = x(0)$.

Om vi har information om utsignalen $x(t)$ kan vi anpassa insignalen $\Rightarrow$

Om $x(t) > x(0) \Rightarrow$ Ta bort neutroner

Om $x(t) < x(0) \Rightarrow$ addera neutroner



Vi väljer insignal

$$f_{in}(t) = -k\left(x(t) - x(0)\right), \quad k > 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \lambda x - kx + kx(0) \xrightarrow{\mathcal{L}}$$

$$-x(0) + sX(s) - \lambda X(s) + kX(s) = \frac{kx(0)}{s}$$

$$-x(0) + sX(s) - (\lambda - k)X(s) = \frac{kx(0)}{s}$$

Samma form som innan med $\lambda \to (\lambda - k)$

$b \to -kx(0)$

$$\Rightarrow x(t) = x(0)e^{(\lambda-k)t} - \frac{kx(0)}{\lambda - k} + \frac{kx(0)}{\lambda - k}e^{(\lambda-k)t}$$

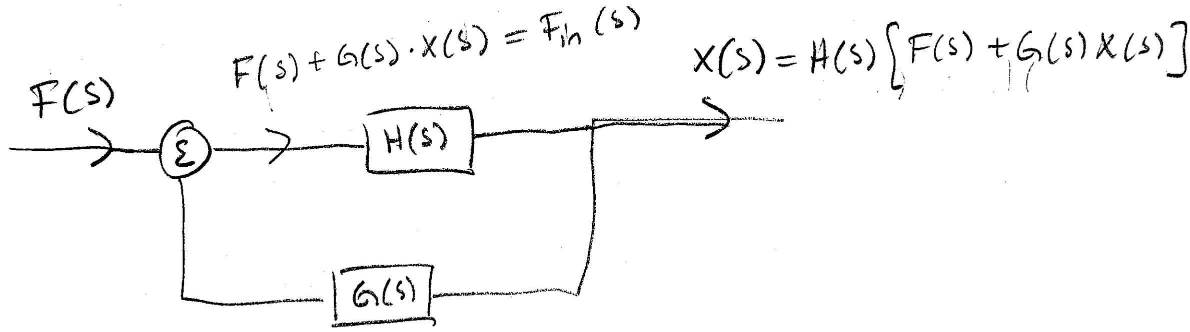
Väljer vi $k > \lambda \Rightarrow (\lambda - k) < 0 \Rightarrow$ stabilt system

$$t \to \infty \Rightarrow x(t) \to \frac{kx(0)}{k - \lambda}$$

dvs vi kan enkelt hålla kedjereaktionen i kontroll.

- Återkoppling kan göra ett instabilt system stabilt

Ett återkopplat system kan illustreras



$G(s) = -k$, $k > 0$, negativ återkoppling , kärnkraftverk

$G(s) = k$, $k > 0$, positiv återkoppling , mikrofon resonans

För att kontrollera olonda system används ofta en PID-regulator.

Bäste är att även använda info. om systemet när regulatorn designas. $\Longrightarrow$ undersök $H(s)$ via impulssvaret o frekvenssvaret.