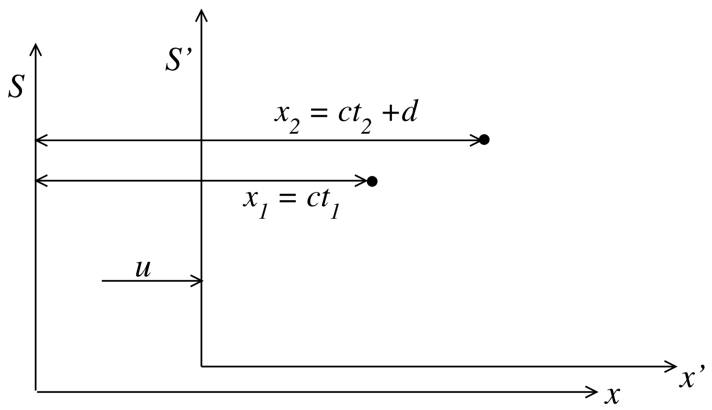
Lösningar, RELATIVITETSTEORI

2004-08-20 kl 14–18

2. Longitudinell dopplereffekt: $T = \sqrt{(c+v)/(c-v)}\, T_0$, där T_0 är perioden i galaxens system och T är perioden i jordens system. Galaxen avlägsnar sig med hastigheten v. Eftersom $c \cdot T = \lambda$ (c konstant) gäller i varje system, kan formeln för dopplereffekten också uttryckas i våglängden λ: $\lambda = \sqrt{(c+v)/(c-v)}\,\lambda_0$. Med $\lambda/\lambda_0 = 6.56$ får vi nu

$$6.56 = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}; \quad 6.56^2 = \frac{c+v}{c-v}; \quad v = \frac{6.56^2-1}{6.56^2+1}\, c \approx 0.955\, c$$

3.



Med beteckningar enligt figur ser vi att $x_2 - x_1 = d$ för $t_2 = t_1$, dvs avståndet mellan ljuspulserna mätes till d i S.

Vi gör nu en Lorentztransformation till systemet S':

$$\begin{cases} x_1' = \gamma_u(x_1 - ut_1) \\ x_2' = \gamma_u(x_2 - ut_2) \end{cases} \qquad \begin{cases} t_1' = \gamma_u(t_1 - (u/c^2)x_1) \\ t_2' = \gamma_u(t_2 - (u/c^2)x_2) \end{cases}$$

I systemet S' definierar vi $d' = x_2' - x_1'$. Denna längd ska mätas när $t_2' = t_1'$. I Lorenztransformationen eliminerar vi x_1 och x_2 med hjälp av relationerna i figuren:

$$\begin{cases} x_1' = \gamma_u(ct_1 - ut_1) \\ x_2' = \gamma_u(ct_2 + d - ut_2) \end{cases} \qquad \begin{cases} t_1' = \gamma_u(t_1 - (u/c^2)ct_1) \\ t_2' = \gamma_u(t_2 - (u/c^2)(ct_2 + d)) \end{cases}$$

Insättning av x_1' och x_2' i uttrycket för d' ger

$$d' = \gamma_u[d + (t_2 - t_1)(c - u)]$$

För $t_1' = t_2'$ får vi nu $t_2 - t_1$ från Lorentztransformationen:

$$t_1 - (u/c^2)ct_1 = t_2 - (u/c^2)(ct_2 + d) \quad \Longrightarrow \quad (t_2 - t_1)\left(1 - \frac{u}{c}\right) = \frac{u}{c^2}d$$

Insatt i uttrycket för d' får vi nu:

$$d' = \gamma_u\left(d + d \cdot \frac{u}{c}\right) = d\sqrt{\frac{1+u/c}{1-u/c}}$$

Längdförändringen påminner om uttrycket för Dopplereffekten och alternativt kan längdförändringen fås som våglängdsförändringen vid Dopplereffekten som ger en mycket kortare lösning.

4. a) I myonens referenssystem blir avståndet, l, till jordytan, $l = h/\gamma$. Myonen måste tillryggalägga denna sträcka under tiden $t = 2.0 \cdot 10^{-6}$ s. Då gäller $t = l/v$, där v är myonens hastighet. Alltså:

$$t = \frac{l}{v} = \frac{h}{v\gamma} = \frac{h\sqrt{1 - v^2/c^2}}{v}$$

Sålunda (med $v > 0$):

$$t^2v^2 = h^2 - h^2\frac{v^2}{c^2} \quad \Longrightarrow \quad v = \pm\frac{h \cdot c}{\sqrt{t^2c^2 + h^2}}; \quad v = 2c/\sqrt{5} = 2.68 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

dvs c:a 90 % av ljushastigheten (vi får det 'exakta' uttrycket genom att, något ologiskt, sätta in $c = 3{\cdot}10^8$ m/s i nämnaren, men behålla 'c' i täljaren).

b) Den relativistiska energin är $W = m_vc^2 = W_k + m_0c^2$ där W_k är den kinetiska energin. Vi söker

$$\begin{aligned}\frac{W_k}{W_k + m_0c^2} &= \frac{m_vc^2 - m_0c^2}{m_vc^2} \\ &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} = (1 - 1/\gamma) = 1 - \sqrt{1 - \left(2/\sqrt{5}\right)^2} = 1 - \sqrt{1/5} = 0.552\end{aligned}$$

dvs. c:a 55 % är rörelseenergi.
(man kan också räkna mera 'numeriskt' och inte utnyttja det 'exakta' uttrycket för hastigheten, $v = 2c/\sqrt{5}$)

5. Före absorbtionen har fotonen rörelsemängden p_γ och energin $p_\gamma c = h\nu = hc/\lambda$. Våglängden är given till 1215.7 Å vilket motsvarar energin $1.635 \cdot 10^{-18}$ J $= 10.2$ eV.
Efter absorbtionen har väteatomem excitationsenergin Q och rörelsemängden p. Bevarad energi och rörelsemängd ger:

$$p_\gamma c + m_0c^2 = \sqrt{(m_0c^2 + Q)^2 + p^2c^2}$$

$$p_\gamma = p$$

Kvadrera 1:a ekvationen och sätt $p_\gamma = p$ enligt 2:a ekvationen:

$$0 = Q^2 + 2Qm_0c^2 - 2m_0c^2pc \Longrightarrow Q = -m_0c^2 \pm \sqrt{(m_0c^2)^2 + 2m_0c^2pc}$$

Vi måste välja plus-tecknet eftersom $Q \geq 0$. Insättning av numeriska värden ($pc = 10.2$ eV, $m_0c^2 = 938 \cdot 10^6$ eV) ger: $Q \approx 10.2$ eV.
Eftersom $pc \ll m_0c^2$ beräknas roten enklast med Taylorutveckling:
$m_0c^2(1 + 2pc/(m_0c^2))^{1/2} \approx m_0c^2(1 + pc/(m_0c^2)) = m_0c^2 + pc$.

Hastigheten beräknas som

$$v = pc^2/E = \frac{pc \cdot c}{\sqrt{(m_0c^2 + Q)^2 + p^2c^2}} \approx 3.26 \text{ m/s}$$

Massändring (1 eV $= 1.602 \cdot 10^{-19}$ J:

$$(Q/c^2) \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ kg } \approx 1.8 \cdot 10^{-35} \text{ kg}$$

6. Vid transformationen

$$\underline{\mathbf{x}}' = V\underline{\mathbf{x}} \ , \tag{1}$$

gäller för $V = V(\vartheta)$ (där ϑ är rapiditeten, $\cosh\vartheta = \gamma$ och $\sinh\vartheta = \frac{u}{c}\gamma$):

$$V(\vartheta) = \begin{bmatrix} \cosh\vartheta & 0 & 0 & -\sinh\vartheta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\vartheta & 0 & 0 & \cosh\vartheta \end{bmatrix} , \tag{2}$$

Vi vill då först visa att om $V(\vartheta)$ och $V(\vartheta')$ beskriver Lorenztransformationer så gäller detta också för $V(\vartheta)V(\vartheta')$. Med

$$V(\vartheta') = \begin{bmatrix} \cosh\vartheta' & 0 & 0 & -\sinh\vartheta' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\vartheta' & 0 & 0 & \cosh\vartheta' \end{bmatrix} , \tag{3}$$

får vi

$$V(\vartheta)V(\vartheta') =$$
$$\begin{bmatrix} \cosh\vartheta\cosh\vartheta' + \sinh\vartheta\sinh\vartheta' & 0 & 0 & -\cosh\vartheta\sinh\vartheta' - \sinh\vartheta\cosh\vartheta' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\cosh\vartheta\sinh\vartheta' - \sinh\vartheta\cosh\vartheta' & 0 & 0 & \cosh\vartheta\cosh\vartheta' + \sinh\vartheta\sinh\vartheta' \end{bmatrix} ,$$

Vi kan nu utnyttja formlerna (som fanns på det formelblad som tillhandahölls vid tentan):

$$\begin{aligned} \cosh(\vartheta_1 \pm \vartheta_1) &= \cosh\vartheta_1\cosh\vartheta_2 \pm \sinh\vartheta_1\sinh\vartheta_2 \\ \sinh(\vartheta_1 \pm \vartheta_1) &= \cosh\vartheta_1\sinh\vartheta_2 \pm \sinh\vartheta_1\cosh\vartheta_2 \end{aligned}$$

och får då

$$V(\vartheta)V(\vartheta') = \begin{bmatrix} \cosh(\vartheta+\vartheta') & 0 & 0 & -\sinh(\vartheta+\vartheta') \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh(\vartheta+\vartheta') & 0 & 0 & \cosh(\vartheta+\vartheta') \end{bmatrix} ,$$

- Vi ser nu att $V(\vartheta)V(\vartheta')$ svarar mot en Lorentztransformation med rapiditeten $\vartheta + \vartheta'$, $V(\vartheta + \vartheta')$, vilket visar att om $V(\vartheta)$ och $V(\vartheta')$ är Lorentztransformation så är också $V(\vartheta)V(\vartheta')$ en Lorentztransformation.
- Av $V(\vartheta)V(\vartheta') = V(\vartheta + \vartheta')$ följer också sambandet

$$\begin{aligned} [V(\vartheta_1)V(\vartheta_2)]V(\vartheta_3) &= V(\vartheta_1 + \vartheta_2)V(\vartheta_3) = V(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3) \\ &= V(\vartheta_1 V(\vartheta_2 + \vartheta_3) = V(\vartheta_1)[V(\vartheta_2)V(\vartheta_3)] \end{aligned}$$

- Värdena för $\cosh(0) = 1$ och $\sinh(0) = 0$ är lätta att beräkna från definitionerna: $\cosh x = (\exp(x) + \exp(-x))/2$ och $\sinh x = (\exp(x) - \exp(-x))/2$. (dessa formler fanns också på formelbladet). Detta innebär att $V(0)$ är enhetsmatrisen, dvs det neutrala elementet.
- Slutligen finns ett $V(\vartheta)^{-1}$, nämligen $V(-\vartheta)$, vilket följer direkt från $V(\vartheta)V(\vartheta') = V(\vartheta + \vartheta')$ dvs. $V(\vartheta)V(-\vartheta) = V(-\vartheta)V(\vartheta) = V(0) =$ 'det neutrala elementet'.

Sålunda uppfyller $V(\vartheta)$ alla de nödvändiga gruppegenskaperna.