Lösningar, RELATIVITETSTEORI

1996-01-08 kl 14–18

1. Se kompendiet, avsn. 2.3b.

2. Longitudinell dopplereffekt: $f = \sqrt{(c-(-v))/(c+(-v))}f_0 = \sqrt{(c+v)/(c-v)}f_0$. I bilens system är frekvensen:

$$f' = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\, f_0$$

När frekvensen för den reflekterade signalen ska transformeras till det stationära systemet användes samma formel för dopplereffekten

$$f_r = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} f' = \frac{c+v}{c-v} f_0$$

där f_r är frekvensen för den reflekterade signalen i det stationära systemet. Frekvensändring:

$$\Delta f = f_r - f_0 = \left(\frac{c+v}{c-v} - 1\right) f_0 = \frac{2v}{c-v} f_0$$

Med $f_0 = 2455$ MHz $= 24.55 \cdot 10^8$ Hz, $v = 130$ km/tim $= 130/3.6$ m/s fås $\Delta f = 591$ Hz

3. S: jordens system, S': rymdskeppets system
Transformera fyrvektorn, $\underline{p'} = (p'_x, iW'/c)$ (eller $\underline{p'} = (p'_x, W'/c)$ beroende på konvention):

$$\begin{cases} \frac{W}{c} = \gamma_u \left(\frac{W'}{c} + \frac{p'_x \cdot u}{c}\right) \\ p_x = \gamma_u \left(p'_x + \frac{W'}{c}\frac{u}{c}\right) \end{cases}$$

Med $u = 2 \cdot 10^8$ m/s, dvs $u/c = 2/3$ fås $\gamma_u = 1/\sqrt{1-(2/3)^2} = 3/\sqrt{5}$.
Alla storheter i högra ledet är nu kända så W/c och p_x fås genom direkt insättning:

$$\begin{aligned} W &= \frac{3}{\sqrt{5}}\left(10^{17} + 10^8 \cdot 2 \cdot 10^8\right) = \frac{3.6}{\sqrt{5}} \cdot 10^{17} \approx 1.61 \cdot 10^{17} \text{ J} \\ p_x &= \frac{3}{\sqrt{5}}\left(10^8 + \frac{10^{17}}{3 \cdot 10^8} \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{29}{3\sqrt{5}} \cdot 10^8 \approx 4.32 \cdot 10^8 \text{ kgm/s} \end{aligned}$$

4. Efter fotonutsändningen betecknas partikelns rörelsemängd med p och fotonens frekvens med ν. Bevarad energi och bevarad rörelsemängd ger likheterna:

$$m_0 c^2 = \sqrt{\left(\frac{m_0}{2} \cdot c^2\right)^2 + p^2 c^2} + h\nu$$

$$0 = h\nu/c - p$$

Den första ekvationen ger:

$$\frac{m_0^2c^4}{4} + (h\nu)^2 = m_0^2c^4 + (h\nu)^2 - 2(m_0c^2)h\nu \quad \Longrightarrow \quad h\nu = \frac{3}{8}m_0c^2 \quad \Longrightarrow \quad \nu = \frac{3}{8}\frac{m_0c^2}{h}$$

Partikelns hastighet fås från relationen: $v = pc^2/E$ (eftersom $p = m_v v$ och $E = m_v c^2$).

$$v = \frac{pc}{E/c} = \frac{(3/8)m_0c^2}{\sqrt{\frac{1}{4}m_0^2c^2 + \left(\frac{3}{8}m_0c\right)^2}} = \frac{3c}{5}$$

5. Transformera till ett system S' som rör sig med hastigheten u relativt x-axeln. Transformationsformlerna är enkla att beräkna genom att utnyttja fälttensorn som är given. Är det möjligt att välja u så att $\mathbf{E} = \mathbf{0}$?

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} = E\mathbf{e}_y \\ \mathbf{B} = B\mathbf{e}_z \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} E'_x = 0 \\ E'_y = \gamma(E - uB) \\ E'_z = 0 \end{array} \right. \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{l} B'_x = 0 \\ B'_y = 0 \\ B'_z = \gamma\left(B - \frac{u}{c^2}E\right) \end{array} \right.$$

$$E'_y = 0 \quad \Rightarrow \quad E = uB \quad \Rightarrow \quad u = E/B$$

dvs systemet S' har hastigheten $u = E/B$ relativt S, där vi noterar att $u < c$ eftersom $E/B < c$. Vi beräknar nu det magnetiska fältet i S' för detta värde på u

$$B'_z = \gamma\left(B - \frac{u}{c^2}uB\right) = \frac{B}{\gamma}$$

Eftersom den magnetiska kraften är vinkelrät mot hastigheten blir farten konstant. Partikeln ligger stilla i S vid $t = 0$, dvs i S' har partikeln hastigheten $-u\mathbf{e}'_x$ vid $t = t' = 0$. $\mathbf{B}'$ är vinkelrät mot denna hastighet vilket innebär att partikeln rör sig i en cirkel i S'. Radien r' bestämmes av att den magnetiska kraften är lika med centrifugalkraften, dvs

$$qu\frac{B}{\gamma} = \frac{m_0\gamma u^2}{r'} \quad \Longrightarrow \quad r' = m_0\gamma^2 u/(qB)$$

där

$$\gamma = \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}; \qquad u = E/B$$