Lösningar, RELATIVITETSTEORI

2005-03-12 kl 14–19

1. Sambandet mellan längd- och tidsavstånd i S och S' fås från Lorentztransformationen:

$$\Delta x' = \gamma_u(\Delta x - u\Delta t), \quad \Delta t' = \gamma_u(\Delta t - u\Delta x/c^2)$$

Om vi tar kvoten mellan dessa två ekvationer eliminerar vi γ_u, och vi får en enkel ekvation för att bestämma den relativa hastigheten u:

$$\frac{\Delta x'}{c\Delta t'} = \frac{\Delta x - u\Delta t}{c\Delta t - u\Delta x/c} \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{\Delta x' c\Delta t - \Delta x c\Delta t'}{\Delta x\Delta x' - c\Delta t\Delta t'}$$

Lösningen u måste uppfylla $-c \leq u \leq +c$ (vilket den gör om differenserna $\Delta x, \Delta t, \Delta x'$ och $\Delta t'$ är fysikaliskt möjliga).
Observera också att att systemet är överbestämt eftersom γ_u är känd om u är känd. Det innebär att u är bestämd från en av Lorentztransformationerna ($\Delta x'$ eller $\Delta t'$) men lösningen (till andragradsekvationen) blir mycket mer komplicerad.

2. Den totala relativistiska energin bevaras vid stöten:

$$\hbar\omega_0 + m_0c^2 = \hbar\omega + \sqrt{\left(m_0c^2\right)^2 + c^2p^2} \quad \Longrightarrow$$

$$\left(\hbar\left(\omega_0 - \omega\right) + m_0c^2\right)^2 = \left(m_0c^2\right)^2 + c^2p^2 \quad \Longrightarrow \quad p = \sqrt{\hbar^2(\omega_o - \omega)^2 + 2\hbar(\omega_o - \omega)m_0c^2}/c$$

3. Transformationen $\underline{x}' = U\underline{x}$ vid övergången $S \to S'$ är en 'vanlig' rotation i (x,y)-planet:

$$U = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformationen $\underline{x}'' = V\underline{x}'$ vid övergången $S' \to S''$ är en Lorentztransformation i (x', ct')-planet. Den kan uttryckas antingen med rapiditeten η eller hastigheten u. I senare fallet ges V enligt (med konventionen $\underline{x} = (x, y, ct)$):

$$V = \begin{bmatrix} \gamma_u & 0 & -\frac{u}{c}\gamma_u \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{u}{c}\gamma_u & 0 & \gamma_u \end{bmatrix}$$

Då fås $\underline{x}'' = V\underline{x}' = VU\underline{x} = W\underline{x}$ där $W = VU$ vid transformationen $S \to S''$. W beräknas genom matrismultiplikation:

$$W = \begin{bmatrix} \gamma_u\cos\varphi & -\gamma_u\sin\varphi & -\frac{u}{c}\gamma_u \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\frac{u}{c}\gamma_u\cos\varphi & \frac{u}{c}\gamma_u\sin\varphi & \gamma_u \end{bmatrix}$$

En fyrvektor $\underline{a} = (a_1, a_2, a_0)$ transformeras enligt $\underline{a}'' = W\underline{a}$. Med W enligt ovan får vi:

$$\begin{cases} a_1'' = \gamma_u\cos\varphi\, a_1 - \gamma_u\sin\varphi\, a_2 - \frac{u}{c}\gamma_u\, a_0 \\ a_2'' = \sin\varphi\, a_1 + \cos\varphi\, a_2 \\ a_0'' = -\frac{u}{c}\gamma_u\cos\varphi\, a_1 + \frac{u}{c}\gamma_u\sin\varphi\, a_2 + \gamma_u\, a_0 \end{cases}$$

Nu fås genom direkt uträkning:

$$
\begin{aligned}
a_1''^2 + a_2''^2 - a_0''^2 &= \left(\gamma_u \cos\varphi\, a_1 - \gamma_u \sin\varphi\, a_2 - \frac{u}{c}\gamma_u\, a_0\right)^2 \\
&+ \left(\sin\varphi\, a_1 + \cos\varphi\, a_2\right)^2 - \left(-\frac{u}{c}\gamma_u \cos\varphi\, a_1 + \frac{u}{c}\gamma_u \sin\varphi\, a_2 + \gamma_u\, a_0\right)^2 \\
&= \left(\gamma_u^2 \cos^2\varphi \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) + \sin^2\varphi\right) a_1^2 \\
&+ \left(\gamma_u^2 \sin^2\varphi \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) + \cos^2\varphi\right) a_2^2 + \gamma_u^2 \left(\frac{u^2}{c^2} - 1\right) a_0^2
\end{aligned}
$$

De blandade termerna försvinner i mellanledet eftersom $\gamma_u^2\left(1 - (u/c)^2\right) = 1$. Vi kan nu åter utnyttja $\gamma_u^2\left(1 - (u/c)^2\right) = 1$ samt också och $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$. Vi finner då att kvadraten på fyrvektorn inte ändras vid transformationen $S \to S''$:

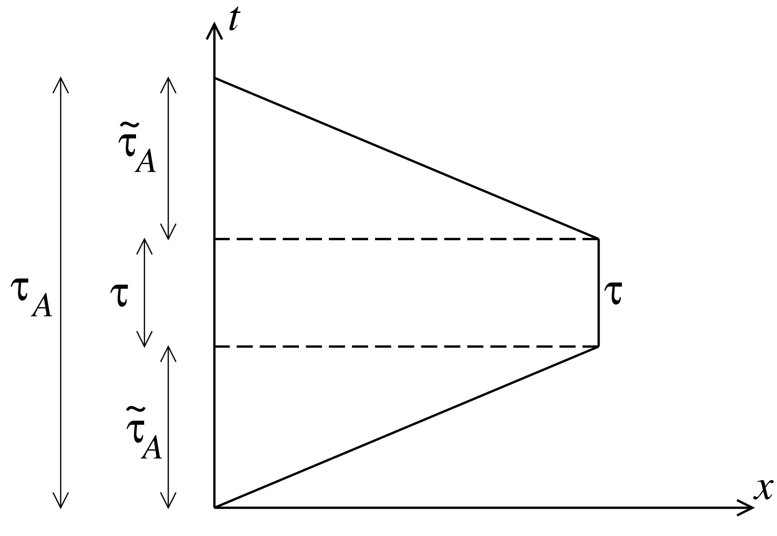
$$a_1''^2 + a_2''^2 - a_0''^2 = a_1^2 + a_2^2 - a_0^2$$

Problemet kan också lösas kortare och mer formellt. Fyrvektorns kvadrat ges av $\underline{a}^2 = \underline{a}^T g \underline{a}$ där $\underline{a}$ nu är en matris och $\underline{a}^T$ den transponerade matrisen och där $g = \mathrm{diag}(+1, +1, -1)$. Då fås för kvadraten på $\underline{a}''$:

$$
\begin{aligned}
a_1''^2 + a_2''^2 - a_0''^2 = \underline{a}''^T g \underline{a}'' = \underline{a}^T W^T g W \underline{a} &= \underline{a}^T U^T V^T g V U \underline{a} \\
&= \underline{a}^T U^T g U \underline{a} = \underline{a}^T g \underline{a} = a_1^2 + a_2^2 - a_0^2
\end{aligned}
$$

som är den efterfrågade relationen. Vi har utnyttjat att $V^T g V = g$ (enl. kap. 5) samt också att $U^T g U = g$ som visas med utnyttjande av $\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2 = 1$ Relationen $U^T g U = g$ innebär att en 'vanlig' vektors längd bevaras vid en rotation i (x,y)-planet (eller allmännare i (x,y,z)-rummet).

4. a)



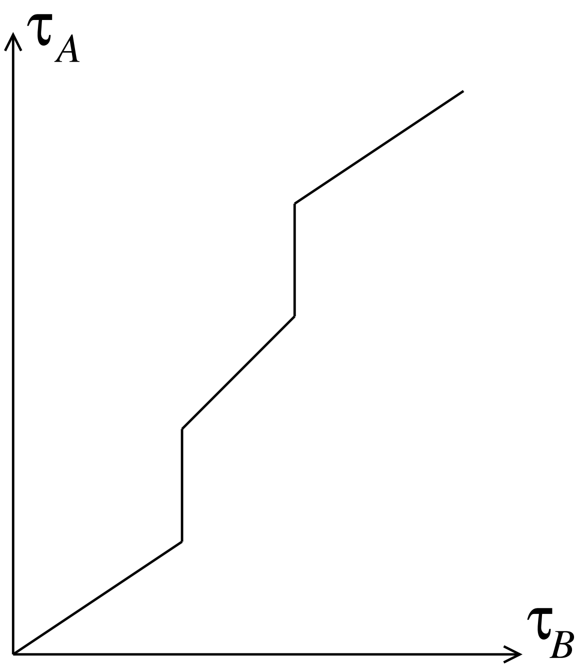
$\tau_A = 2\tilde{\tau}_A + \tau$

b)

$$
\begin{aligned}
\tau_B &= \tilde{\tau}_A \sqrt{1 - v^2/c^2} + \tau + \tilde{\tau}_A \sqrt{1 - (-v)^2/c^2} \\
&= 2\tilde{\tau}_A \sqrt{1 - v^2/c^2} + \tau = (\tau_A - \tau)\sqrt{1 - v^2/c^2} + \tau
\end{aligned}
$$

B befinner sig i tre olika inertialsystem efter varandra vilket innebär att samtidighetsuppfattningen ändras, $\tau_B < \tau_A$.

c)



Se diskussionen om klockparadoxen i kompendiet.
När B avlägsnar sig ser han A:s klocka gå långsammare än hans egen klocka. När han stannar ändras hans samtidighetsuppfattning och B uppfattar att A:s klocka gör ett hopp framåt och hinner förbi hans egen klocka. När B ligger stilla tycker han att klockorna går lika fort. När B startar ser han återigen att A:s klocka gör ett hopp framåt. När han åker tillbaka tycker han att A:s klocka går långsammare än hans egen klocka. Totalt sett hinner A:s klocka längre än B:s klocka enligt ovan.

5. I polisbilens system är Ferrarins hastighet:

$$v' = \frac{v-u}{1-uv/c^2}$$

I Ferrarins system är frekvensen $\nu\sqrt{(1-v'/c)/(1+v'/c)}$ enligt dopplereffekten. Vid transformationen tillbaka till polisbilens system ändras frekvensen åter med samma faktor: $\sqrt{(1-v'/c)/(1+v'/c)}$. Den reflekterade frekvensen blir då:

$$\nu' = \left(\sqrt{\frac{1-v'/c}{1+v'/c}}\right)^2 \nu = \frac{c-uv/c-v+u}{c-uv/c+v-u}\,\nu$$