# 'Lösningar' till tentamen i relativitetsteori, FMF061

### 2006-03-11 kl 14–19

1. a) Antag att markens system är $S$ och att tåg A's system är $S'$. Detta system rör sig med hastigheten $v$ relativt $S$, eller ekvivalent $S$ rör sig med hastigheten $-v$ relativt $S'$. Tåg B's hastighet blir då $-v$ mätt i $S$. Tåg B's hastighet i $S'$ fås då från sammansättningslagen för parallella hastigheter:

$$w = \frac{-v - v}{1 + (-v)^2/c^2} = -\frac{2v}{1 + v^2/c^2}$$

b) Längden fås direkt från formeln för längdkontraktion (med hastigheten $w$):

$$l' = l_0/\gamma_w = l_0\sqrt{1 - w^2/c^2} = \ldots = l_0\frac{1 - v^2/c^2}{1 + v^2/c^2}$$

c) För att helt passera tåg B måste tåg A röra sig sin egen längd + andra tågets längd (som det mätes i tåg A's system, $S'$). Med den relativa hastigheten $w$ blir passertiden

$$T = \frac{l_0 + l_0\frac{1-v^2/c^2}{1+v^2/c^2}}{w} = \frac{l_0\left(1 + \frac{1-v^2/c^2}{1+v^2/c^2}\right)(1 + v^2/c^2)}{2v} = \frac{l_0}{v}$$

2. a) Med y-axeln uppåt fås hastigheten och rörelsemängden i Gretas system:

$$\mathbf{v} = 0.7c\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \qquad \mathbf{p} = m_0\gamma_v\left(\frac{0.7c}{\sqrt{2}}, \frac{0.7c}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Rörelsemängden som fyrvektor:

$$\underline{p} = m_0\gamma_v\left(\frac{0.7c}{\sqrt{2}}, \frac{0.7c}{\sqrt{2}}, 0, ic\right)$$

Nuneriska värden: $m_0 = 2$ kg, $\gamma_v = 1/\sqrt{1 - 0.7^2} = 1/\sqrt{0.51}$:

$$\underline{p} = \frac{2}{\sqrt{0.51}}\left(\frac{0.7c}{\sqrt{2}}, \frac{0.7c}{\sqrt{2}}, 0, ic\right) \approx (1.4, 1.4, 0, 2.8i)c\,\text{kg}$$

där vi gjort en grov uppskattning utan att använda räknare.

b) I Hans system: Transformera fyrvektorn till ett system som rör sig med hastigheten $u = 0.5c$:

$$\underline{p'} = \Lambda(u)\underline{p} = m_0\gamma_v\begin{bmatrix} \gamma_u & 0 & 0 & i(u/c)\gamma_u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i(u/c)\gamma_u & 0 & 0 & \gamma_u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v/\sqrt{2} \\ v/\sqrt{2} \\ 0 \\ ic \end{bmatrix}$$

Vi får då:

$$\underline{p'} = m_0\gamma_v\left(\gamma_u\left(\frac{v}{\sqrt{2}} - u\right),\ \frac{v}{\sqrt{2}},\ 0,\ ic\gamma_u\left(1 - \frac{uv}{c^2\sqrt{2}}\right)\right)$$

Här gäller: $\gamma_u = 1/\sqrt{1 - 0.5^2} = 2/\sqrt{3}$ (övriga värden enligt ovan).
Med tillgång till räknare fås

$$\underline{p'} \approx (-0.016, 1.39, 0, 2.43i)c\,\text{kg}$$

3.

$$y = \cos(\omega t - kx) \tag{1}$$

Lorentztransformationen:

$$x = \gamma(x' + ut'),\ t = \gamma(t' + (u/c^2)x')$$

Vi får då

$$y' = \cos(\omega\gamma(t' + (u/c^2)x') - k\gamma(x' + ut')) = \cos\left(t'\gamma(\omega - ku) - x'\gamma(k - \frac{u\omega}{c^2}\right)$$

där vi samlat $t'$ och $x'$ termerna i andra ledet så att vi kan tolka:

$$\omega' = \frac{\omega - ku}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},\ k' = \frac{k - \omega(u/c^2)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Vi får nu hastigheten $v'$ som,

$$v' = \lambda' f' = \omega'/k' = \frac{\omega - ku}{k - \omega(u/c^2)} = \frac{\omega/k - u}{1 - \omega/k(u/c^2)} = \frac{v - u}{1 - vu/c^2}\ ,$$

vilket är den sökta relationen vid sammamsättning av parallella hastigheter.

4. Rapididteten definieras från

$$\cosh\vartheta = \gamma \quad \text{och} \quad \sinh\vartheta = \frac{u}{c}\gamma, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}$$

Härur följer:

$$u/c = \tanh\vartheta = \frac{\exp(\vartheta) - \exp(-\vartheta)}{\exp(\vartheta) + \exp(-\vartheta)}$$

Vi kan nu lätt lösa ut $\exp(\vartheta)$ i $u/c$. Sätt $s = \exp(\vartheta)$ för att få mindre att skriva:

$$u/c = \frac{s - 1/s}{s + 1/s} \quad \Longrightarrow \quad s^2 = \frac{1 + u/c}{1 - u/c} = \exp(2\vartheta) \quad \Longrightarrow \quad \vartheta = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + u/c}{1 - u/c}$$

Transformationen från $S$ till $S'$ beskrivs av transformationsmatrisen:

$$V = \begin{bmatrix} \cosh\vartheta & 0 & 0 & -\sinh\vartheta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\vartheta & 0 & 0 & \cosh\vartheta \end{bmatrix}$$

Analogt för transformationen från $S'$ till $S''$:

$$V' = \begin{bmatrix} \cosh\vartheta' & 0 & 0 & -\sinh\vartheta' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\vartheta' & 0 & 0 & \cosh\vartheta' \end{bmatrix}$$

där

$$\cosh\vartheta' = \gamma' \quad \text{och} \quad \sinh\vartheta = \frac{u'}{c}\gamma', \quad \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - (u'/c)^2}}$$

Transformationen från $S$ till $S''$ beskrivs nu av transformationsmatrisen:

$$W = V'V = \begin{bmatrix} \cosh\vartheta' & 0 & 0 & -\sinh\vartheta' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\vartheta' & 0 & 0 & \cosh\vartheta' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cosh\vartheta & 0 & 0 & -\sinh\vartheta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\vartheta & 0 & 0 & \cosh\vartheta \end{bmatrix}$$

Vi får då

$$W = \begin{bmatrix} \cosh\vartheta'\cosh\vartheta + \sinh\vartheta'\sinh\vartheta & 0 & 0 & -\cosh\vartheta'\sinh\vartheta - \sinh\vartheta'\cosh\vartheta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\vartheta'\cosh\vartheta - \cosh\vartheta'\sinh\vartheta & 0 & 0 & \sinh\vartheta'\sinh\vartheta + \cosh\vartheta'\cosh\vartheta \end{bmatrix}$$

Vi utnyttjar nu formlerna for $\cosh(\vartheta + \eta)$ och $\sinh(\vartheta + \eta)$

$$W = \begin{bmatrix} \cosh(\vartheta + \vartheta') & 0 & 0 & -\sinh(\vartheta + \vartheta') \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh(\vartheta + \vartheta') & 0 & 0 & \cosh(\vartheta + \vartheta') \end{bmatrix}$$

vilket visar att om två transformationer definieras av rapiditeterna $\vartheta$ och $\vartheta'$ så definieras den sammansatta transformationen av $\vartheta+\vartheta'$, dvs, rapiditeten är additativ.

5. Problemet löses enklast genom att utnyttja att skalärprodukten mellan fyrvektorer är invariant: $\underline{p_a} \cdot \underline{p_b} = \underline{p'_a} \cdot \underline{p'_b}$. I labsystemet:

$$\underline{p_a} = (\mathbf{p}_a, i\frac{W}{c}), \quad \underline{p_b} = (\mathbf{p}_b, i\frac{W}{c})$$

Eftersom beloppet av vardera $\mathbf{p}_a$ och $\mathbf{p}_a$ ges av $p$ och vilomassan är känd, kan vi lätt beräkna energin för var och en av de båda protonerna: $W^2 = m_p^2c^4 + p^2c^2$. I a-protonens vilosystem gäller:

$$\underline{p'_a} = (\mathbf{0}, im_pc), \quad \underline{p'_b} = (\mathbf{p}'_b, i\frac{W'_b}{c})$$

Invariansen av skalärprodukten ger nu:

$$\underline{p_a} \cdot \underline{p_b} = \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b - W^2/c^2 = \underline{p'_a} \cdot \underline{p'_b} = -m_pW'_b$$

Det gäller: $\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b = p^2\cos(180 - \alpha) = -p^2\cos(\alpha)$. Med $W$ enligt ovan fås då:

$$-p^2\cos\alpha - (m_p^2c^4 + p^2c^2)/c^2 = -m_pW'_b \quad \Longrightarrow \quad W'_b = \frac{1}{m_p}\left(m_p^2c^2 + p^2\left(1 + \cos(\alpha)\right)\right)$$

Uppgift a), $\alpha = 0$, fås som ett specialfall

$$W'_b = \frac{1}{m_p}\left(m_p^2c^2 + 2p^2\right)$$

Vi ser också att för $\alpha = 180°$ fås $W'_b = m_pc^2$, vilket stämmer eftersom b då ligger stilla i a's vilosystem.

Som ett alternativ kan man också utnyttja att beloppet av totala fyrvektorn $\underline{p_a} + \underline{p_b}$ är invariant, vilket ger väsentligen samma (fast något längre) lösning.

Det är också möjligt att lösa uppgift a) genom att bestämma $v$ från $\mathbf{p}$ och $W$ och sedan bestämma b's hastighet i a's vilosystem från addition av hastigheter och därefter $W = m_vc^2$, men denna lösning leder till mycket längre räkningar. Motsvarande lösning på uppgift b) förefaller väseentligen 'omöjlig'.