

TENTAMEN I RELATIVITETSTEORI, FMF061

2006-03-11 kl 14–19

Hjälpmedel: TEFYMA (eller motsvarande)

För full poäng krävs fullständig lösning! Svara med exakta värdet när numeriska värden sätts in (och gärna också med en grov 'numerisk' uppskattning).

1. Antag att två tåg med vilolängden l_0 rör sig i motsatt riktning med samma hastighet v på parallella spår. Enligt klassisk mekanik kommer det att ta tiden l_0/v från det att de först möts till dess att de helt har passerat varandra. Låt oss nu räkna relativistiskt och följ förloppet som det uppfattas av en av lokförarna:
 - a) Vilken hastighet mäter denne lokförare att det andra tåget har relativt tåget han befinner sig i.
 - b) Vilken längd har det andra tåget enligt hans mätning
 - c) Hur lång blir passagetiden enligt hans uppfattning, dvs tiden från det att framändorna möts till dess att bakändorna helt passerat varandra.
2.
 - a) Greta som är en stark kvinna, kastar en sten med vilomassan $m_0 = 2$ kg upp i luften med farten $0.70c$. Kastriktningen bildar 45° med den horisontella x-riktningen. Bestäm stenens rörelsemängd som fyrvektor i Gretas jordfasta system.
 - b) Hans åker tåg med farten $0.5c$ på en horisontell järnväg som är parallell med x-komponenten av stenens rörelsemängd. Vad blir stenens rörelsemängd som fyrvektor i tågets system.
3. En våg som rör sig med hastigheten v i systemet S kan beskrivas enligt

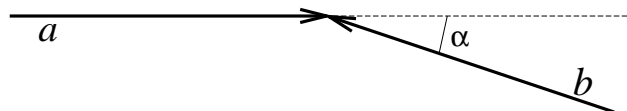
$$y = \cos(\omega t - kx) \quad (1)$$

där ω är vinkelfrekvensen ($\omega = 2\pi f$, $f =$ frekvens) och k är vågtalet, dvs $k = 2\pi/\lambda$ ($\lambda =$ våglängd). Gör en Lorentztransformation av uttrycket (1) till ett system S' som rör sig med hastigheten u längs x-axeln relativt S . Utnyttja transformationen för att härleda formeln för addition av parallella hastigheter, dvs bestäm vågens hastighet i S' uttryckt i u och dess hastighet $v = \lambda f$ i S .

4. *Obs att Detta problem bygger på kap. 5 i kompendiet som inte ingår i årets kurs!*
Ett system S' rör sig med hastigheten u längs x-axeln i systemet S .

- a) Hur definieras rapiditeten θ för transformationen från S till S' . Härled ett uttryck hur rapiditeten kan uttryckas i hastigheten u , dvs $\theta = \theta(u)$.

- b) Ett annat system S'' rör sig med hastigheten u' längs x' -axeln i systemet S' . Härled transformationsmatrisen från S till S'' med hjälp av transformationsmatriserna från S till S' och från S' till S'' och visa härur att rapiditeten är en additiv storhet.
5. Två protonstrålar, a och b, vardera med rörelsemängden p (p är beloppet av 3-vektorn \mathbf{p}) kolliderar enligt figuren. Protonens vilomassa sättes till m_p .



- a) Hur stor energi har protonen i stråle b bedömt från a-protonens vilosystem om vinkeln α sättes till 0° .
- b) Hur stor är motsvarande energi för ett godtyckligt värde på vinkeln α .

Nedan följer definitioner och några formler för de hyperboliska funktionerna:

$$\sinh \vartheta = \frac{\exp(\vartheta) - \exp(-\vartheta)}{2} \quad ; \quad \cosh \vartheta = \frac{\exp(\vartheta) + \exp(-\vartheta)}{2}$$

$$\tanh \vartheta = \frac{\sinh \vartheta}{\cosh \vartheta}$$

$$\cosh^2 \vartheta - \sinh^2 \vartheta = 1$$

$$\sinh \vartheta \cosh \eta \pm \cosh \vartheta \sinh \eta = \sinh(\vartheta \pm \eta)$$

$$\cosh \vartheta \cosh \eta \pm \sinh \vartheta \sinh \eta = \cosh(\vartheta \pm \eta)$$