Facit, Tenta 2018-03-16

1.

a) -
b) -
c) Temperaturen $T(x,y,z) = z/(x^2+y^2)$ är given. Värme flödar i den riktning där T minskar mest, d.v.s. i riktningen

$$-\nabla T = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{z}{x^2+y^2} = \left(\frac{2xz}{(x^2+y^2)^2}, \frac{2yz}{(x^2+y^2)^2}, -\frac{1}{x^2+y^2}\right).$$

2.

Kraften $\mathbf{F}$ kan skrivas

$$\mathbf{F} = -k\frac{1}{r}\mathbf{e}_r = \left\{\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{\mathbf{r}}{r}\right\} = -k\frac{\mathbf{r}}{r^2},$$

där konstanten $k > 0$.

Skruvkurvan L beskrivs av parameteriseringen

$$\mathbf{r}(t) = a\cos(t)\mathbf{e}_x + a\sin(t)\mathbf{e}_y + bt\mathbf{e}_z,$$

där $t \in [0, 2\pi]$. Vidare blir $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{a^2+b^2t^2}$ och

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -a\sin(t)\mathbf{e}_x + a\cos(t)\mathbf{e}_y + b\mathbf{e}_z.$$

Arbetet W fås slutligen enligt

$$\begin{aligned} W &= \int_L \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt = -k\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^2}(a\cos(t), a\sin(t), bt)\cdot(-a\sin(t), a\cos(t), b)dt \\ &= -k\int_0^{2\pi}\frac{-a^2\cos(t)\sin(t) + a^2\sin(t)\cos(t) + b^2t}{r^2}dt = -k\int_0^{2\pi}\frac{b^2t}{a^2+b^2t^2}dt \\ &= -k\left[\frac{1}{2}\ln(a^2+b^2t^2)\right]_{t=0}^{t=2\pi} = -\frac{k}{2}\ln\left(\frac{a^2+4\pi^2b^2}{a^2}\right) \end{aligned}$$

3.

Med $\mathbf{B} = (x-x^3, y-y^3, z-z^3)/3$ fås att

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(x-x^3, y-y^3, z-z^3\right)\frac{1}{3} = 1-x^2-y^2-z^2.$$

Gauss' sats ger

$$\oint_S \mathbf{B}dS = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{B}dV = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{B}dV = \iiint_V (1-x^2-y^2-z^2)dxdydz,$$

där V är området (volymen) som innesluts av den slutna ytan S. Största värdet på ovanstående integral fås om vi integrerar över området där $(1-x^2-y^2-z^2) \geq 0$, d.v.s. över ett klot centrerat i origo och med radien $R = 1$. Med andra ord, S är enhetssfären. Vi byter till sfäriska koordinater och beräknar det maximala värdet på integralen till

$$\iiint_{\substack{0\leq r\leq 1\\ 0\leq\theta\leq\pi\\ 0\leq\phi\leq 2\pi}} (1-r^2)r^2\sin\theta dr d\theta d\phi = \left[\frac{4\pi r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1} - \left[\frac{4\pi r^5}{5}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{4\pi}{3} - \frac{4\pi}{5} = \frac{8\pi}{15}$$

4.
Stokes' sats säger att

$$\oint_L \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S},$$

där S är en (korrekt orienterad) yta begränsad av slutna kurvan L. Med $\mathbf{A}=(y^3,0,x^3)$ fås att

$$\nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^3 & 0 & x^3 \end{vmatrix} = (0,-3x^2,-3y^2)$$

En i detta fall möjlig yta, S, fås med parametriseringen

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1-u-v \end{cases}$$

där området begränsas av

$$\begin{cases} 0\le u\le 1 \\ 0\le v\le 1-u \end{cases}$$

Ortsvektorn till ytan ges således av $\mathbf{r}(u,v)=(u,v,1-u-v)$. Vidare följer att

$$\frac{d\mathbf{r}}{du}=(1,0,-1)\ ,\quad \frac{d\mathbf{r}}{dv}=(0,1,-1)\ ,\quad \frac{d\mathbf{r}}{du}\times\frac{d\mathbf{r}}{dv} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1,1,1)$$

Genom parametrisering kan flödesintegraler beräknas enligt

$$\iint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_P} \mathbf{B}(\mathbf{r}(u,v))\cdot\left(\frac{d\mathbf{r}}{du}\times\frac{d\mathbf{r}}{dv}\right)dudv,$$

(där korrekt orientering antas). Med $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$ fås

$$\begin{aligned}\iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\substack{0\le u\le 1\\ 0\le v\le 1-u}} (0,-3u^2,-3v^2)\cdot(1,1,1)dudv = -3\iint_{\substack{0\le u\le 1\\ 0\le v\le 1-u}} (u^2+v^2)dudv \\ &= -3\int_0^1 \left(u^2(1-u)+\frac{(1-u)^3}{3}\right)du = -3\left[\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\frac{u}{3}-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{12}\right]_{u=0}^{u=1} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Observera att normalen till ytan, d.v.s. $\frac{d\mathbf{r}}{du}\times\frac{d\mathbf{r}}{dv}=(1,1,1)$, pekar åt rätt håll för användning av Stokes' sats, givet orienteringen hos L (och därmed orienteringen hos S).

5.
Med $\mathbf{B}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}$, $g=f$ samt kedjeregeln $\nabla\cdot(g\mathbf{B})=g(\nabla\cdot\mathbf{B})+\mathbf{B}\cdot(\nabla g)$ fås

$$\nabla\cdot[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}f] = f\nabla\cdot[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}] + [(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}]\cdot(\nabla f)$$

Ytterligare en användning av samma kedjeregel, fast nu med $\mathbf{B}=\mathbf{r}$, $g=\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}$ ger

$$\nabla\cdot[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}f] = f(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\nabla\cdot\mathbf{r} + f\mathbf{r}\cdot\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) + [(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}]\cdot(\nabla f)$$

Vidare är

$$\nabla\cdot\mathbf{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(x,y,z) = 3\ ,\quad \nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)(a_x x+a_y y+a_z z) = \mathbf{a}$$

Då f är en funktion av r, byter vi till sfäriska koordinater ($\mathbf{r}=r\mathbf{e}_r$) och får att

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} = a_r r \quad\text{samt}\quad \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r$$

vilket medfär att $\mathbf{r}\cdot(\nabla f) = r\frac{\partial f}{\partial r}$. Sammantaget ger detta att de lösningar vi söker skall uppfylla

$$0 = \nabla\cdot[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}f] = 3fa_r r + f\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} + a_r r^2\frac{\partial f}{\partial r} = 4fa_r r + a_r r^2\frac{\partial f}{\partial r}$$

Med andra ord

$$0 = 4f + r\frac{\partial f}{\partial r}$$

som har lösningen

$$f = \frac{C}{r^4}$$