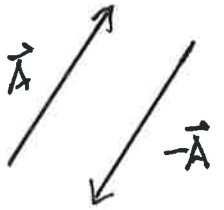
VEKTORANALYS

1. INLEDANDE AVSNITT – EN REPETITION

1.1. VEKTOR ALGEBRA

vektorer



t.ex. hastighet $\vec{v}$

kraft $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

rörelsemängd $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

skalärer t.ex. massa m

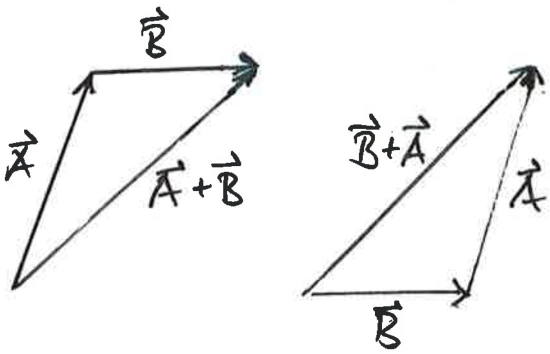
elektronladdningen e

temperatur T

ljushastigheten (absolut) c

vektorer har i allmänhet storlek och riktning

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$



Multiplikation med en skalär

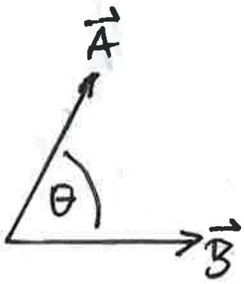
$$a\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = a\vec{A} + a\vec{B}$$

om $a \in R > 0$ $\Rightarrow$ ändrar storlek men inte riktning

Det finns komplexa vektorrum – se kvantmekanik!

Skalärprodukt

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \underbrace{A \cdot B \cdot \cos\theta}_{\text{är en skalär – därför namnet!}}$$



Vektorprodukt (även kallad "kryssprodukt")

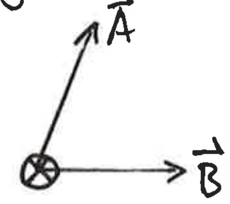
$$\vec{A} \times \vec{B} = A \cdot B \cdot \sin\theta \cdot \hat{n}$$

kryss

↑ enhetsvektor som är vinkelrät mot det plan som spänns upp av $\vec{A}, \vec{B}$.

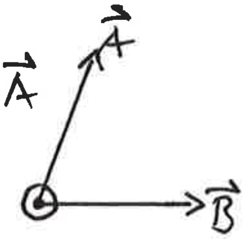
"Högerhandsregeln"

$\vec{A} \times \vec{B}$



in i planet

$\vec{B} \times \vec{A}$



ut ur planet

BILD
V1.ppt

Notera att $\vec{A} \times \vec{B}$ är en vektor!

– därför namnet "vektorprodukt".

Distributiv: $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$

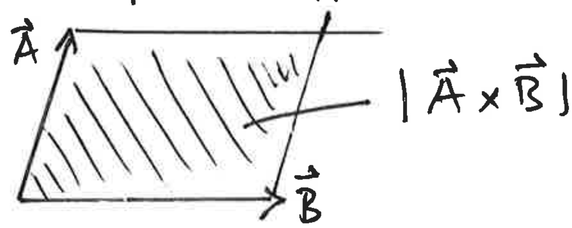
men, inte kommutativ,

$\vec{B} \times \vec{A} \neq \vec{A} \times \vec{B}$, men $\vec{B} \times \vec{A} = -(\vec{A} \times \vec{B})$

(se högerhandsregeln)

Geometrisk tolkning:

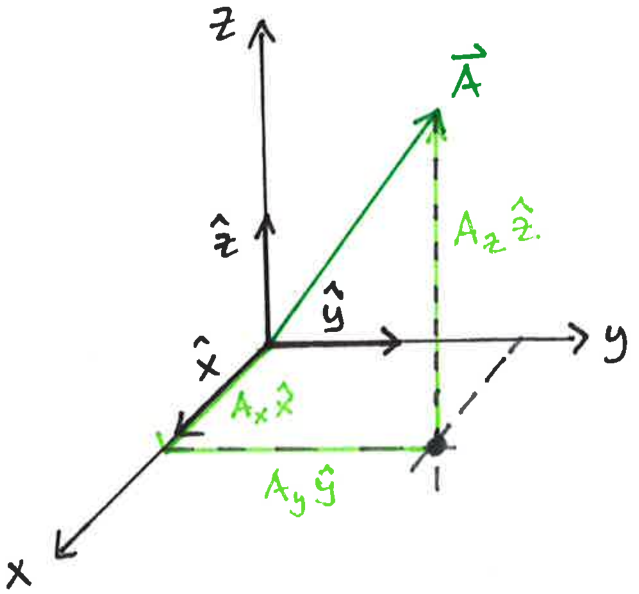
$|\vec{A} \times \vec{B}|$ är lika med ytan av parallelogrammet som spänns upp av $\vec{A}$ och $\vec{B}$,



Notera: $\vec{A} \times \vec{A} = 0 \quad \forall \vec{A}$.

Enhetsvektorerna $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ eller $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$

$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$$



Man kan visa att

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

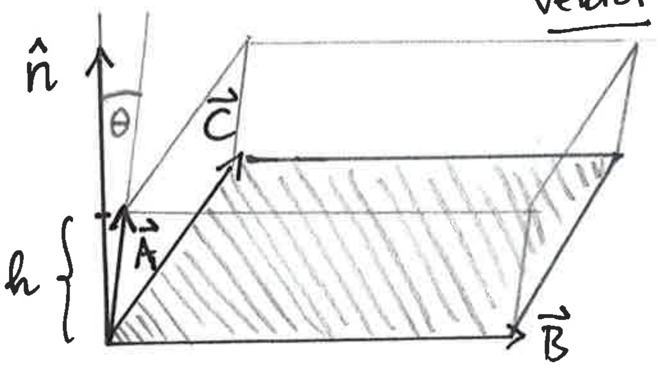
(lätt att komma ihåg!)

Sarrus' regel

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & - & & + & \end{array}$$

"Trippel" - produkt

Skalär $\vec{A} \cdot \underbrace{(\vec{B} \times \vec{C})}_{\text{vektor}}$ är volymen av den parallelepiped som genereras av $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$.



$$\vec{B} \times \vec{C} = \hat{n} \, |\vec{B} \times \vec{C}|$$

area

$$\underbrace{\vec{A} \cdot \underbrace{(\vec{B} \times \vec{C})}_{\text{vektor}}}_{\text{Skalärprodukt}} = |\vec{A}| \cdot |\hat{n}| \cdot |\vec{B} \times \vec{C}| \cdot \cos\theta$$

$$= h \cdot |\vec{B} \times \vec{C}|$$

Vinkel mellan $\vec{A}$ och $\hat{n}$

Trippel produkt, vektor:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

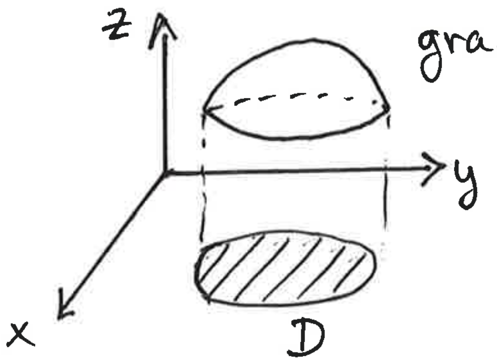
SHOW GRIFFITH'S

Se första sidorna i Griffiths' för övningar och mer information!

1.2. REELLVÄRDA OCH VEKTORVÄRDA FUNKTIONER

Reellvärda funktioner av 2 variabler

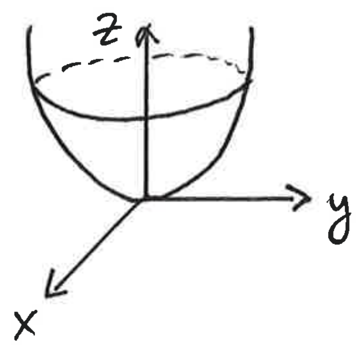
$$z = f(x,y) \qquad x,y \in D$$



graf $(x, y, f(x,y))$

Exempel: $f(x,y) = x^2 + y^2$

PPT



Nivåkurvor:

$f(x,y) = c =$ Konst.

Många exempel i naturen — väderkarta med isobarer, orienteringskarta med höjdlinjer etc.!

ppt VÄDER

Samma sak i 3D, t.ex. $f(x,y,z)$

Nivåytor $f(x,y,z) = \text{konst.} = c$

Exempel: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

Nivåytorna är koncentriska sfärer runt origo.

Sfären är ett specialfall av de så kallade "andragradsytorna"

Ellipsoider:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

prolat

t. ex. $a = b > c$

oblat

Hyperboloider,

Paraboloider — se $\boxed{\text{PPT}}$

Exempel i Analysboken,

Sidorna 29/30.

Vektorvärda funktioner

Låt D vara en mängd i $\mathbb{R}^n$.

Med en funktion

$$\vec{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

menar vi en regel som till varje punkt

$$\vec{x} = (x_1 \dots x_n) \text{ i } D$$

ordnar en punkt i $\mathbb{R}^p$

som kallas <u>värdet</u> av $\vec{f}$ i $\vec{x}$.

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(x_1 \dots x_n)$$

eller

$$y_1 = f_1(x_1 \dots x_n)$$
$$y_2 = f_2(x_1 \dots x_n)$$
$$\vdots$$
$$y_p = f_p(x_1 \dots x_n)$$

Kan ses som specialfall!

Reellvärd funktion: $p = 1$ (se exempel ovan)

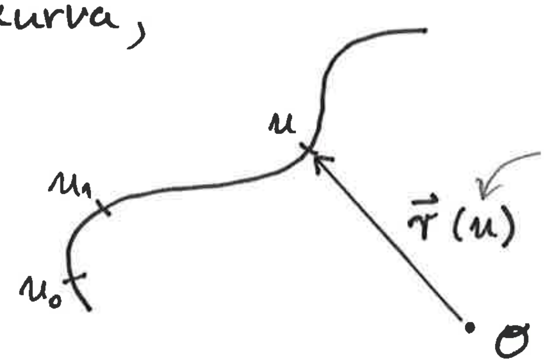
<u>vektorvärd</u> " : $p > 1$

Exempel från naturen – magnetfält $\vec{B}$, strömningsfält $\vec{f}(x,y,z)$, vindhastigheter, mm.!

$\boxed{\text{PPT}}$

Andra exempel på vektorvärda funktioner:

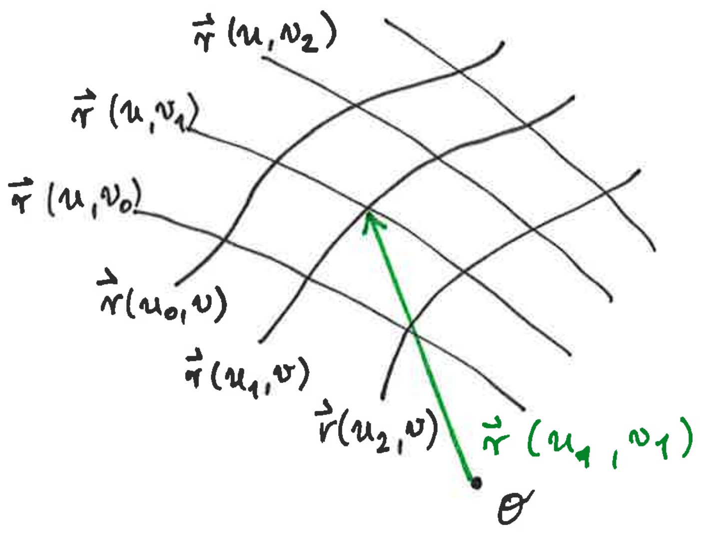
1. Ortsvektorn $\vec{r}(u)$ från origo till en rymdkurva,



kallas "parametrisering"

2. Ortsvektorn $\vec{r}(t)$ och hastighetsvektorn $\vec{v}(t)$ för en rörlig partikel är vektorvärda funktioner av tiden t.

3. Ortsvektorn $\vec{r}(u,v)$ till en yta i rymden beror av två oberoende variabler u, v.



två kurvor definerar en yta!

Skalärfält och vektorfält.

Man uppfattar fältet som en funktion av oberoende variabler, eller som en "funktion av en vektor"

$$f(x,y,z) = f(\vec{r}).$$

SKALÄRFÄLT $\phi(\vec{r})$

associerar tal (här mest reella – men kan även vara komplexa) t.ex. med punkter $\vec{r}$ i rummet.

Exempel:
- Temperaturfördelning i en kropp
- Tryckfördelning på väderkartan

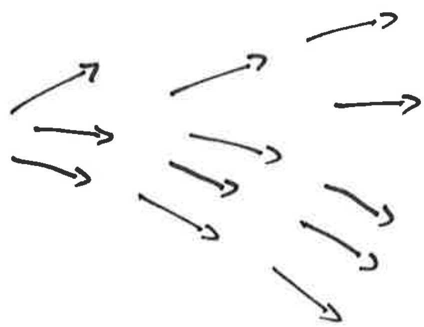
etc.

VEKTORFÄLT $\vec{A}(\vec{r})$

tillordnar vektorer $\vec{A}(\vec{r})$ till punkter $\vec{r}$.

Exempel:
- Hastighetsfördelning i en strömmande vätska
- $\vec{E}(\vec{r})$, $\vec{B}(\vec{r})$ $\boxed{\text{PPT}}$

Ett vektorfält åskådliggörs geometriskt genom att man ritar ut fältvektorerna $\vec{A}(P_i)$ i någon lämplig vald punktmängd $\{P_i\}$



En fältlinje Γ till vektorfältet är en kurva vars tangentvektor i varje punkt P på kurvan är parallell med $\vec{A}(P)$. Vektorfältet anger orientering hos fältlinjerna.

1.3. DERIVERING AV VEKTORVÄRDA FUNKTIONER

DEFINITION:

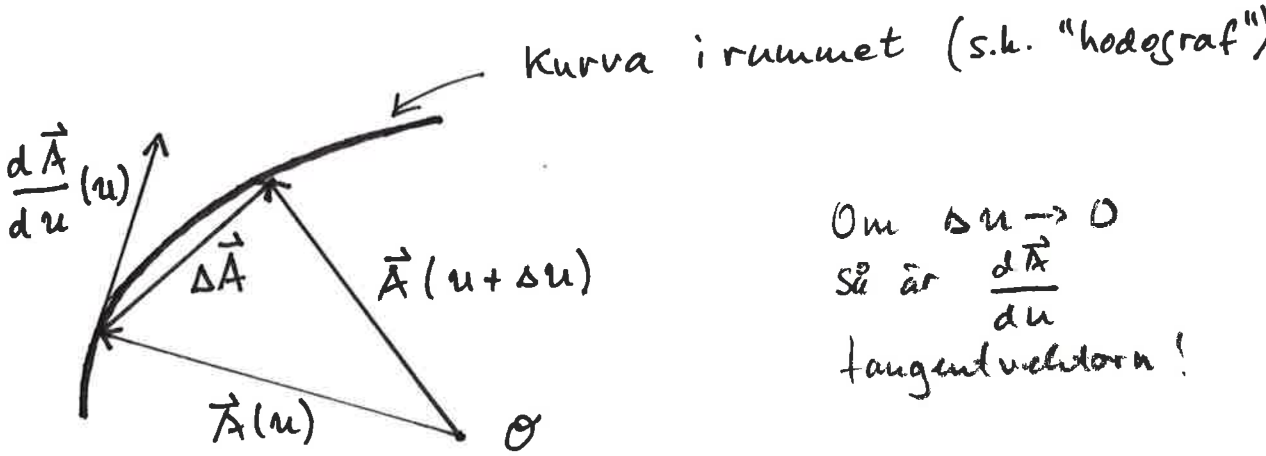
Låt $\vec{A}(u)$ vara en vektorvärd funktion, och

$$\Delta\vec{A} = \vec{A}(u+\Delta u) - \vec{A}(u).$$

Om $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{\Delta \vec{A}}{\Delta u}$ existerar,

sägs $\vec{A}(u)$ ha derivatan

$$\frac{d\vec{A}}{du} \equiv \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta\vec{A}}{\Delta u}.$$



Om $\Delta u \to 0$ så är $\dfrac{d\vec{A}}{du}$ tangentvektorn!

Derivatans kartesiska komponenter:

SATS:

$$\frac{d\vec{A}}{du} = \frac{d}{du}(A_x, A_y, A_z) = \left(\frac{dA_x}{du}, \frac{dA_y}{du}, \frac{dA_z}{du}\right)$$

$$\frac{d\vec{A}}{du} = \lim \frac{1}{\Delta u}\left(\sum_i A_i(u+\Delta u)\hat{e}_i - \sum_i A_i(u)\hat{e}_i\right)$$

$$= \sum_i \left(\lim \frac{A_i(u+\Delta u) - A_i(u)}{\Delta u}\right)\hat{e}_i =$$

$$= \sum_i \frac{dA_i}{du}\hat{e}_i \quad \blacksquare.$$

SATS:

Deriveringsregler. Låt $\vec{A}(u)$ och $\vec{B}(u)$ vara vektorvärda funktioner och $\phi(u)$ en skalärvärd funktion.
Då gäller:

$$\frac{d}{du}(\vec{A}+\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{du} + \frac{d\vec{B}}{du}$$

$$\frac{d}{du}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{du} + \left(\frac{d\vec{A}}{du}\right)\cdot\vec{B}$$

$$\frac{d}{du}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{du} + \frac{d\vec{A}}{du}\times\vec{B}$$

$$\frac{d}{du}(\phi\vec{A}) = \phi\frac{d\vec{A}}{du} + \left(\frac{d\phi}{du}\right)\vec{A}$$

Bevis – insättning i def. av derivaten.
Hemma!

SATS:

Antag att $\vec{A} = \vec{A}(u)$ och $u = u(v)$ är deriverbara funktioner av u resp. v. Då gäller

$$\frac{d}{dv}\vec{A}[u(v)] = \frac{d\vec{A}}{du}\cdot\frac{du}{dv}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dv} = \left(\frac{dA_x}{dv}, \frac{dA_y}{dv}, \frac{dA_z}{dv}\right) =$$

$$= \left(\frac{dA_x}{du}\frac{du}{dv}, \frac{dA_y}{du}\frac{du}{dv}, \frac{dA_z}{du}\frac{du}{dv}\right) = \frac{d\vec{A}}{du}\cdot\frac{du}{dv} \quad \blacksquare$$

PARTIELL DERIVERING:

Vi substituerar $d \to \partial$

$(u) \to (u, v \dots)$

$(u + \Delta u) \to (u + \Delta u, v, \dots)$

SATS:

Om $\vec{A}(u, v, \dots)$ har kontinuerliga andraderivator gäller

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial v \partial u}$$

Om $u, v, \dots$ är funktioner av en variabel t gäller

$$\frac{d}{dt} \vec{A}(u(t), v(t), \dots) = $$
$$= \frac{\partial \vec{A}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \dots$$

Om $u, v, \dots$ är funktioner av flera oberoende variabler $r, s, \dots$ gäller

$$\frac{\partial}{\partial r} \vec{A}(u(r,s\dots), v(r,s\dots), \dots) =$$
$$= \frac{\partial \vec{A}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial r} + \dots$$

Differentialen av $\vec{A}$

$$d\vec{A} \equiv \frac{\partial \vec{A}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{A}}{\partial v} dv + \dots$$

kontinuerliga funktioner