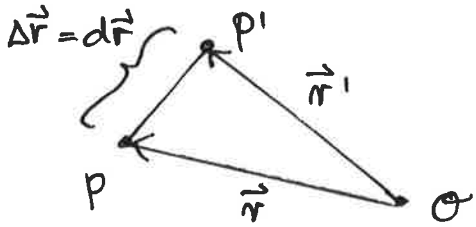
ORTSVEKTORDIFFERENTIALEN

Ortsvektorn $\vec{r}$ från origo O till punkt P kann uppfattas som en funktion av P's koordinater,

$$\vec{r} = \vec{r}(x,y,z) = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$$

$$= \underbrace{(x,y,z)}_{\text{vektor}}.$$

$$d\vec{r} = (dx, dy, dz)$$



P : x, y, z
P' : $x+dx,\ y+dy,\ z+dz$

$\vec{r}$ är linjär i de oberoende variablerna, och $\Delta\vec{r} = d\vec{r}$

Om $\vec{r}(t)$ är den tidsberoende ortsvektorn till en partikel, t.ex., så är

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{hastighetsvektorn}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad \text{accelerationsvektorn}$$

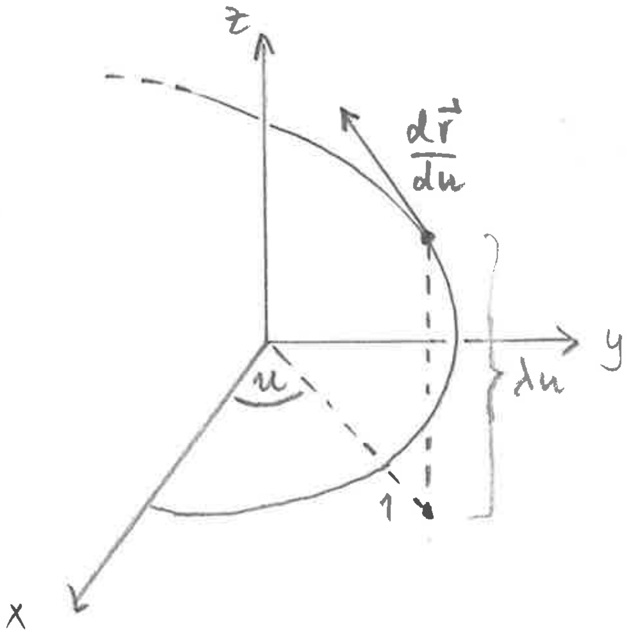
Man skriver ofta

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} \quad \text{och} \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

EXEMPEL: Tangentlinien till rymdkurvan

$$\vec{r} = (\cos u,\ \sin u,\ \lambda u)$$

Kurvan är en skruvlinje kring z-axeln med radius 1 och stigning $2\pi\lambda$

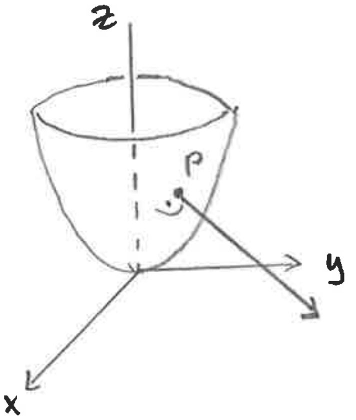


$$\frac{d\vec{r}}{du} = (-\sin u,\ \cos u,\ \lambda)$$

och den normerade tangentvektorn blir

$$\hat{T}(u) = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\,\frac{d\vec{r}}{du}$$

EXEMPEL: Normalriktningen till rotationsparaboloiden $z = x^2 + y^2$ i punkten $P: (1,2,5)$



Vi börjar igen med att söka en parameterframställning av ytans equation,

dvs. försöka uttrycka de Kartesiska koord. på ytan som funktioner av två oberoende variabler u och v:

$$x = x(u,v)$$
$$y = y(u,v)$$
$$z = z(u,v)$$

(två variabler för att vi nu ha en yta, innan hade vi en Kurva!)

Ortsvektorn till punkter på ytan:

$$\vec{r} = (x, y, z) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)).$$

Vi antar att P har koordinaterna (u_0, v_0).

Två koordinatlinjer går genom P:

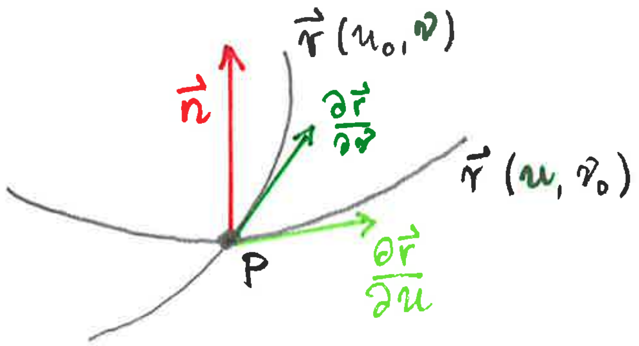
$$\vec{r} = \vec{r}(u, v_0) \quad \text{och} \quad \vec{r} = \vec{r}(u_0, v)$$

Koordinatlinjers tangentriktningar i P är

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \quad \text{och} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

Ytans normal i P är ortogonal mot dessa,

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$



(Kom ihåg – kryssprodukt och högerhandsregel!)

En enkel parameterframställning för rotationsparaboloiden är

$$x = u, \quad y = v, \quad z = u^2 + v^2$$

$$\rightsquigarrow \quad \vec{r} = (u, v, u^2 + v^2)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (1, 0, 2u) \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (0, 1, 2v)$$

→ Normalriktningen blir

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (2u, 2v, -1).$$

Detta gäller för en godtycklig punkt på ytan.

I punkt P är $u = 1$ och $v = 2$

$$\rightarrow \vec{n}_P = (2, 4, -1).$$

1.4. GRADIENTEN

Låt ϕ vara ett kontinuerligt deriverbart skalärfält, i.e., de partiella förstaderivatorna är kontinuerliga funktioner.

I punkten $\vec{r} = (x, y, z)$ antar fältet $\phi(x, y, z)$ och i $\vec{r} + d\vec{r} = (x + dx, y + dy, z + dz)$ erhålls $\phi(x, y, z) + \Delta\phi$, där

$$\Delta\phi \approx d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz$$

↖ beräknad i $\vec{r}$.

"Idee": detta ser ju ut som ett skalärprodukt av två vektorer

DEFINITION:

Gradienten av skalärfältet är vektorfältet

$$\operatorname{grad} \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

beskriver ϕ's variation i den omedelbara omgivningen till varje punkt $\vec{r}$.

Tydligen, $d\phi = \text{grad}\,\phi \cdot d\vec{r}$

Vi inför ortsvektordifferentialens belopp ds och riktning $\hat{e}$ ← är enhetsvektor

$$d\vec{r} = \hat{e}\, ds$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{d\phi}{ds} = \text{grad}\,\phi \cdot \hat{e}}$$

riktnings-derivatan i riktning $\hat{e}$ från punkten $\vec{r}$.

> Graden av ökning hos ϕ i en given riktning är således lika med gradientvektorns komponent i riktningen.

Riktningsderivatan kan även definieras som

$$\frac{d\phi}{ds} = \lim_{s\to 0} \frac{\phi(\vec{r}+s\hat{e}) - \phi(\vec{r})}{s}$$

SATS:

> Gradient-vektorn i punkten P, dvs. vektorn $(\text{grad}\,\phi)_P$, pekar i den riktning, i vilken ϕ växer snabbast då man utgår från P.
> Den maximala ökningen av ϕ per längdenhet är $|(\text{grad}\,\phi)_P|$.

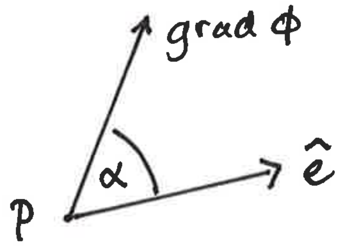
Bevis: Riktningsderivatan i riktning $\hat{e}$

$$\frac{d\phi}{ds} = \operatorname{grad}\phi \cdot \hat{e} = |\operatorname{grad}\phi| \cdot \cos\alpha \, |\hat{e}|$$

har maximum $(= |\operatorname{grad}\phi|)$ där

$\cos\alpha = 1$, dvs. $\alpha = 0$, dvs.

då $\hat{e} \parallel \operatorname{grad}\phi$.



i.e. it is
max increase
when you choose
$\hat{e}$ along grad ϕ.

SATS:

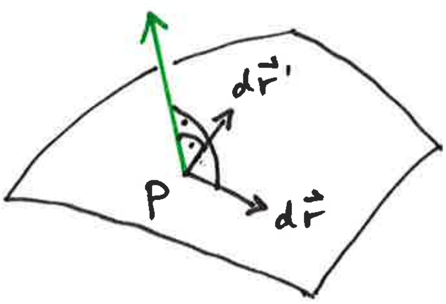
$\boxed{\text{Om } \phi \text{ har maximum eller minimum i en punkt P, är } \operatorname{grad}\phi = 0 \text{ i P.}}$

$\boxed{\text{grad } \phi \text{ i punkten P är \underline{ortogonal} mot nivåytan } \phi = c \text{ genom P.}}$

Bevis: Vid en liten förflyttning $d\vec{r}$ längs nivåytan ändras ej skalärfältets värde, $\phi = c$, $\frac{d\phi}{dr} = 0$, dvs.

$$d\phi = \operatorname{grad}\phi \cdot d\vec{r} = 0.$$

Detta gäller för varje $d\vec{r}$ i nivåytan.



Tätheten av ytor i nivåytefamiljen

$$\phi = c + nh \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

är proportionell mot gradientvektorns belopp.

$\boxed{\text{PPT.}}$

EXEMPEL:

Hur snabbt växer temperaturen

$$T(\vec{r}) = xy^2 + z^2$$

då man rör sig i riktningen $(1,2,2)$ utgående från punkten $P:(2,-1,1)$?
I vilken riktning från P växer T snabbast?

$$\text{grad } T = (y^2, 2xy, 2z)$$

$$(\text{grad } T)_P = (1, -4, 2)$$

Enhetsvektor $\hat{e}$ skall vara normerad,

$$\hat{e} = \frac{1}{\sqrt{1+2^2+2^2}} \underbrace{(1,2,2)}_{\text{den angivna riktningen}} = \frac{1}{3}(1,2,2).$$

enhetsvektor i riktningen

$$\left(\frac{dT}{ds}\right)_{P,\hat{e}} = (\text{grad } T)_P \cdot \hat{e}$$

$$= (1,-4,2) \cdot \frac{1}{3}(1,2,2) = -1.$$

dvs temperaturen sjunker 1 grad / längdenhet då man flyttar sig i riktningen $\hat{e}$.
Temperaturen ökar snabbast i riktningen $(\text{grad } T)_P = (1,-4,2)$.

Den maximala ökningen är

$$\left(\frac{dT}{ds}\right)_{P,\max} = |(\text{grad } T)_P|$$

$$= \sqrt{1^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{21}$$

(grad / längdenhet).

Man kan lätt visa att

$$\text{grad } (\phi + \psi) = \text{grad } \phi + \text{grad } \psi .$$

$$\text{grad } (\phi \psi) = (\text{grad } \phi)\psi + \phi \text{ grad } \psi .$$

$$\text{grad } (f(\phi)) = \frac{df}{d\phi} \text{ grad } \phi$$

för att

$$\text{grad } (f(\phi)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \dots\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}, \dots\right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \phi}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \dots\right) \blacksquare .$$

och slutligen

$$\frac{d}{du}\phi(\vec{r}(u)) = \text{grad } \phi \cdot \frac{d\vec{r}}{du}$$

för att

$$\frac{d}{du}\phi(\vec{r}(u)) = \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{dy}{du} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{dz}{du}$$

$\blacksquare$.

2015 20

Sammanfattning –

Kom ihåg att

- Gradienten grad $\phi(x,y,z)$ uppför sig som en vektor.
- den är vinkelrät mot kurr-tangenten (eller nivåytan eller...)
- den pekar i riktning mot växande värden av ϕ (där ϕ växer snabbast)
- Gradientens längd anger storleken av tillväxt hastigheten
- I områden där ϕ har snabb tillväxt ligger nivåkurverna tätt och gradientvektorn är lång!

Annan notation!

skalär

$$\nabla \phi := \text{grad } \phi = \underbrace{\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)}_{\text{vektor}} \phi}_{\text{vektor!}}$$

Kan även generaliseras till flera dimensioner!

1.4. DIVERGENZ OCH ROTATION.

Vi påminner oss om att gradienten beter sig som en vektor,

$$\text{grad } f(x,y,z) = \vec{\nabla} f(x,y,z) =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)}_{} f(x,y,z)$$

$\vec{\nabla}$ är en vektor<u>operator</u>

$\vec{\nabla} f(x,y,z)$

inte en multiplikation, men en instruktion att derivera!

$\Rightarrow$ Det spelar roll i vilken <u>ordning</u> man använder $\vec{\nabla}$ - Operatorn! ⚠

(blir mycket viktigt t.ex. senare i Kvantmekaniken! $\vec{p} = i\hbar\vec{\nabla}$ till exempel!) Kommutatorerna etc.

En vanlig vektor $\vec{A}$ kan multipliceras på tre olika sätt:

1) Med en skalär $a \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot a$

2) Med en annan vektor, $\vec{A} \cdot \vec{B}$

3) — " — , $\vec{A} \times \vec{B}$.

Vi gör samma sak med $\vec{\nabla}$-operatorn,

1) Gradient $\underbrace{\vec{\nabla} \underbrace{f(x,y,z)}_{\text{skalär}}}_{\text{vektor}}$ $(\neq f \vec{\nabla} !!!)$ ⚠

2) På en vektorfunktion $\vec{f}(x,y,z)$

$$\underbrace{\underbrace{\vec{\nabla}}_{\text{vektor}} \cdot \underbrace{\vec{f}(x,y,z)}_{\text{vektor}}}_{\text{Skalärprodukt}} = \text{div } \vec{f} \qquad (\text{"Divergens"})$$

3) På en vektorfunktion $\vec{f}(x,y,z)$

$$\underbrace{\underbrace{\vec{\nabla}}_{\text{vektor}} \times \underbrace{\vec{f}(x,y,z)}_{\text{vektor}}}_{\text{vektorprodukt}} = \text{rot } \vec{f} \qquad (\text{"Rotation"})$$

Gradienten har vi redan pratad mycket om. Låt oss nu titta på de andra två!

DIVERGENS

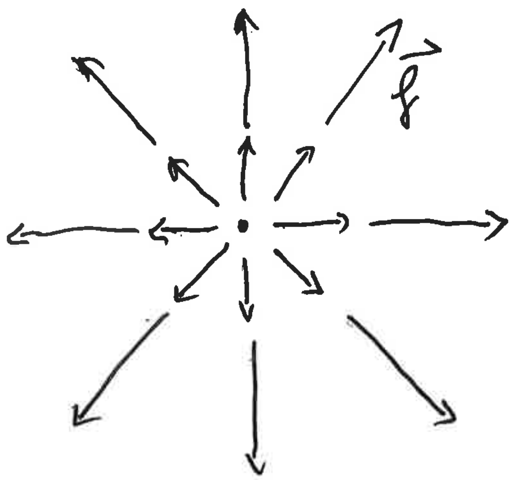
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (f_x, f_y, f_z)$$

$$= \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} f_x + \frac{\partial}{\partial y} f_y + \frac{\partial}{\partial z} f_z}_{\text{är en skalär.}}$$

Vektorfunktionen $\vec{f}$ betyder – det finns en vektor till alla punkter i rymden.

$$\vec{f} = f_x \cdot \hat{e}_x + f_y \hat{e}_y + f_z \hat{e}_z .$$

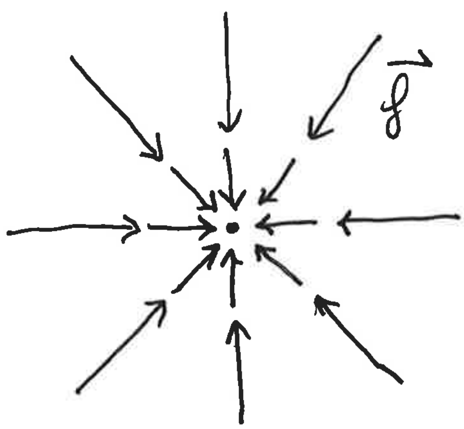
Exempel på vektorfält $\vec{f}$ med stor div.



"Källa"

div ≥ 0

Stort värde (absolut)

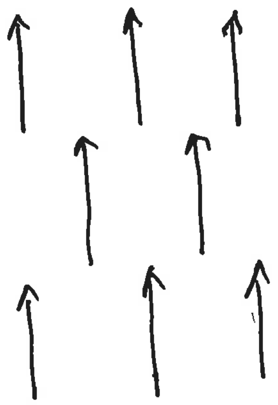


"Sänka"

div ≤ 0,

stort absolut värde

Ett exempel på "ingen divergens alls":



alla på samma håll och lika långa.

Fler exempel i övningarna.

(se .ppt)

ROTATION ("CURL" på engelska).

$$\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{f}}_{\text{vektor!}} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial_x & \partial/\partial_y & \partial/\partial z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{matrix}(= \text{rot } \vec{f}\,) \\ (= \text{curl } \vec{f}\,)\end{matrix}}_{\text{annat namn!}}$$

$$= \hat{x}\left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)$$

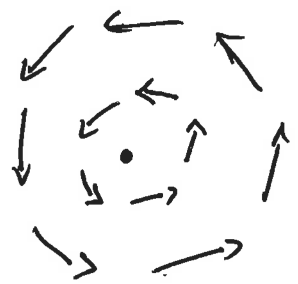
Kan man ta rotationen av en skalär?

Nej, det är meningslöst!

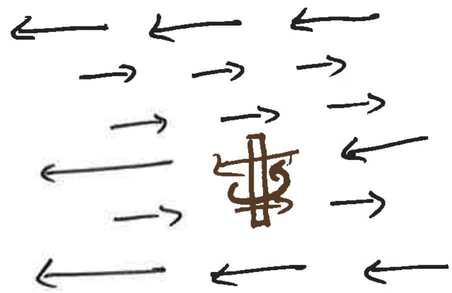
$\vec{\nabla} \times \vec{f}$ mäter hur mycket vektorn $\vec{f}$ "roterar" runt punkten (x,y,z).

Exempel:

Vortex



Motflöde



– en liten träbit skulle börja roterar i flödet!

Titta igen på våra exempel för divergensen. Har dessa rotation?

Visa fler exempel på ppt slides.

(Ibland kan det vara svårt att gissa resultaten!)

Man kan räkna med $\vec{\nabla}$ som man är van vid med vektorer, och vanlig derivata.

$$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{\nabla}\cdot\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{\nabla}\times\vec{A} + \vec{\nabla}\times\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}(\underset{\text{konstant}}{k}\, f(x,y,z)) = k\cdot\vec{\nabla}f$$

$$\vec{\nabla}\cdot(k\,\vec{A}(x,y,z)) = k\;\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(x,y,z)$$

$$\vec{\nabla}\times(k\vec{A}) = k(\vec{\nabla}\times\vec{A}).$$

kolla omslaget i Griffiths bok –

alla är inte så enkla som man tror!

→ (Dela ut kopior av detta.)

formelsamling!

1.5. Andraderivator

$\text{grad}\, f = \underbrace{\vec{\nabla} f}_{\text{är en vektor.}}$

vi kan därför betrakta

$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f \quad$ (i)

$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f \quad$ (ii)

$\text{div}\, \vec{f} = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{f}}_{\text{är en skalär}}$

vi kan därför betrakta dess gradient

$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) \quad$ (iii)

$\text{rot}\, \vec{f} = \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{f}}_{\text{är en vektor}}$

vi kan därför betrakta både dess divergens och rotation

$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}) \quad$ (iv)

$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{f}) \quad$ (v)

Låt oss nu titta på dessa equationer (i–v) i mer detalj.

(i) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

vektor vektor

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f$$

detta kan skrivas som

$$\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)}_{\text{Kallas } \Delta} f(x,y,z)$$

Kallas Δ Laplace-Operator

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \Delta$$

Nabla · Nabla = Nabla^2 = Delta.

(det finns också "Quabla" – som används t.ex. i relativistisk Kvantmekanik;

$\partial_\mu = (\partial_{ct}, \partial_{xyz})$

$\Box := \partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \Delta$)

kallas också för d'Alambert-Operator.

är en viktig Operator t.ex. i Speciella relativitätsteorin.

(ii) Rotationen av gradienten är alltid noll.

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0$$

$$\text{rot grad } f = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f\right)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \Big(\underbrace{\frac{\partial}{\partial y} (\vec{\nabla} f)_z - \frac{\partial}{\partial z} (\vec{\nabla} f)_y}_{\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} f - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} f}, \ldots \Big)$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} f - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} f}_{0!}$$

(iii) förekomma bara sällan inom fysiken.

Notera – $\vec{\nabla} (\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{f}}_{\text{skalär}}) \neq \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})}_{} \vec{f}$ ⚠

vektor

$$\vec{\nabla}^2 \vec{f} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{f})$$

(iv) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}) = 0$, div rot $\vec{f} = 0$.

(v) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{f}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) - \nabla^2 \vec{f}$

Mycket av detta kommer att diskuteras i övningarna.