1.6. Integration av vektorvärda funktioner

Låt $\vec{A}(u, v \ldots)$ vara en kontinuerlig, vektorvärd funktion i området D.

SATS:

$$\iint_D \ldots \vec{A}\, du\, dv \ldots =$$

$$= \left(\iint_D \ldots A_x\, du\, dv \ldots, \iint_D \ldots A_y\, du\, dv, \ldots, \iint_D \ldots A_z\, du\, dv \ldots \right).$$

Detta innebär att en rad satser för reella funktioner är tillämpliga även på vektorvärda funktioner.

Exempelvis:

$$\int_a^b \frac{d\vec{A}}{du}\, du = \vec{A}(b) - \vec{A}(a)$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x \vec{A}(u)\, du = \vec{A}(x)$$

om $\vec{A}(u)$ uppfyller samma fordringar som ställs på de reella funktionerna i motsvarande satser för reella funktioner av en variabel.

3. LINIE OCH YTINTEGRALER

3.1. Längden av en kurva

Den enklaste typen av en vektorvärd funktion är en Kurva i $\mathbb{R}^p$

$$\vec{x} = \vec{x}(t) = (x_1(t) \dots x_p(t))$$

t.ex. $p = 2$ "planar kurva"

$$\vec{r}_{2D} = \vec{r}_{2D}(t) = \underbrace{(x_1(t), x_2(t))}_{\text{skrivs som } (x(t),\, y(t))}$$

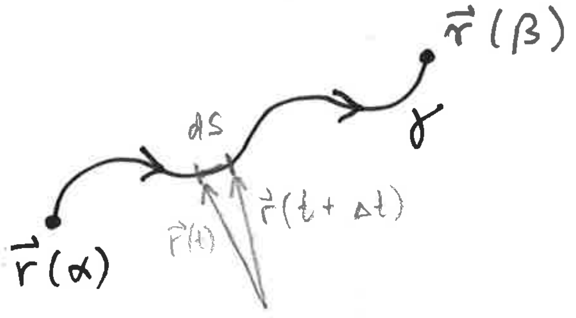
$p = 3$

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Längden av en kurva γ av klass $\mathcal{C}^1$:

(klass $\mathcal{C}^1$ betyder "partiellt deriverbart och derivatorna är kontinuerliga")

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad \alpha \le t \le \beta$$



$$dS = |\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)| = |\vec{r}\,'(t)|\, dt$$

Bågelement

$$ds = |\vec{r}\,'(t)|\, dt$$

på kurvan γ

Längden av γ är då $\int_\gamma ds$

Båglängden upp till t (t.ex. en tidspunkt):

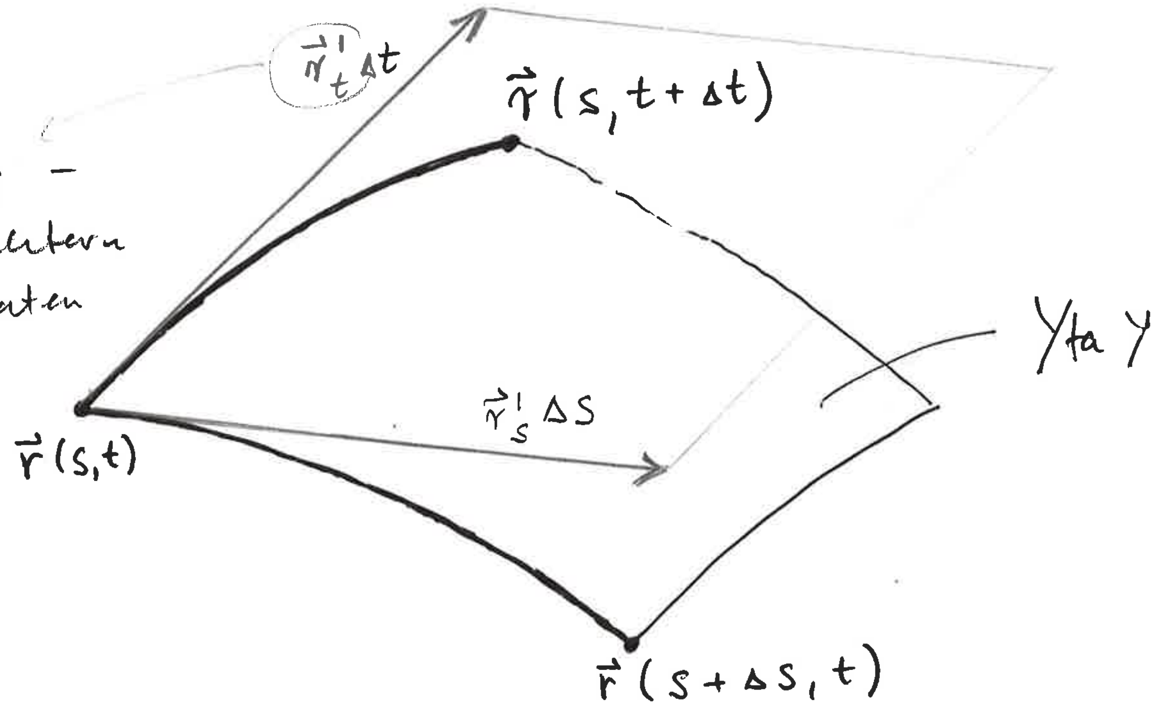
$$S(t) = \int_\alpha^t |\vec{r}\,'(\tau)|\, d\tau$$

3.2 Area av en buktig yta

Låt $\vec{r}(s,t)$ vara en parameterframställning av en yta i rymden, $(s,t) \in D$.

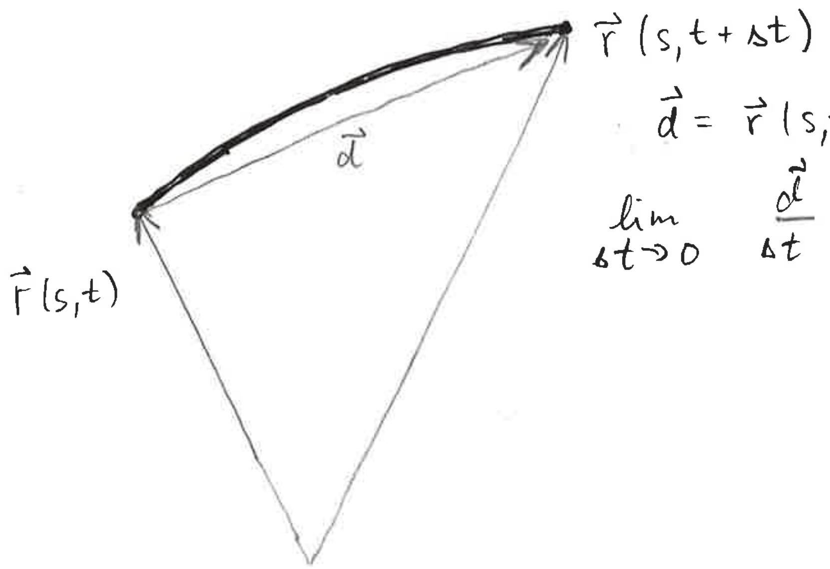
(Kom ihåg – yta genom två kurvor!)

Kom ihåg – tangentvektorn är derivaten



Kan hoppas över, bara förklaringen av tangentvektorn, igen:

$$\vec{r}'_t(s,t) = \lim_{t \to 0} \frac{\vec{r}(s,t+\Delta t) - \vec{r}(s,t)}{\Delta t}$$



$$\vec{d} = \vec{r}(s,t+\Delta t) - \vec{r}(s,t)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{d}}{\Delta t} = \vec{r}'_t(s,t)$$

Vi skriver

$$|(\vec{r}_s{}' \Delta s) \times (\vec{r}_t{}' \Delta t)| = |\vec{r}_s{}' \times \vec{r}_t{}'| \, \Delta s \, \Delta t$$

och inser att det är rimligt att uppfatta

$$dS = |\vec{r}_s{}' \times \vec{r}_t{}'| \, ds \, dt$$

som ett <u>areaelement</u> på ytan Y.

$\rightarrow$ area av Y, $A_Y = \iint_D |\vec{r}_s{}' \times \vec{r}_t{}'| \, ds \, dt$

Man använder ofta istället notationen

$$A_Y = \iint_Y dS$$

(precis som vi gjorde
för kurvans längd, $\int_\gamma ds = \int_\alpha^\beta |\vec{r}\,'(t)| \, dt$)

Många exempel i analysboken, t. ex. arean av en sfär.

Studera detta hemma!

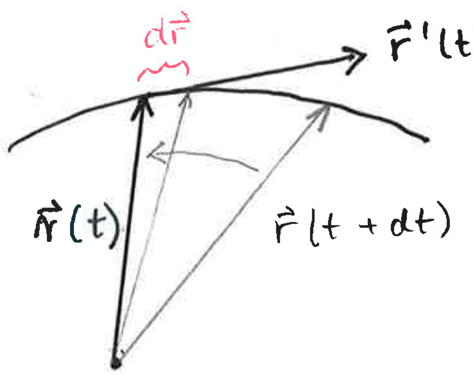
p. 308–310

3.3. Kurvintegraler

Betrakta den fysikaliska situationen att en partikel rör sig längs en kurva γ i ett kraftfält som påverkar partikeln med kraften $\vec{F}(\vec{r})$.

Vi vill beräkna arbetet längs kurvan γ som vi beskriver med parameterframställningen

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad \alpha \leq t \leq \beta$$



$$\vec{r}\,'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t) = d\vec{r}$$

Arbete: $\vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt$

Arbetet längs hela kurvan γ:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(\vec{r}(t))\, \vec{r}\,'(t)\, dt$$

(se 2 exempel i Analysboken!)

DEFINITION av Kurvintegralen (här i 2D)

Let $\vec{F}(\vec{r}) = (P(\vec{r}), Q(\vec{r})) = (P(x,y), Q(x,y))$

vara ett kontinuerligt vektorfält

definierad i en öppen mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$

Om γ är en orienterad $\mathcal{C}^1$ - kurva i D

med parameterframställningen

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$

Kurva med riktning som har kontinuerliga derivator.

så kaller vi

$$\int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{r}(t))\,\vec{r}\,'(t)\,dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \left(P(x,y)\,x'(t) + Q(x,y)\,y'(t) \right) dt$$

för Kurvintegralen av fältet $\vec{F} = (P, Q)$

längs Kurvan γ.

Denna Kurvintegralen betecknas med

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \underbrace{d\vec{r}}_{d\vec{r} = \vec{r}\,'(t)\,dt} \qquad \text{eller} \qquad \underbrace{\int P\,dx + Q\,dy}_{\text{Kallas ”differentialform”}}$$

Definitionen är oberoende av valet av parametriseringen av Kurvan γ.

(passa på orienteringen av Kurvan!)

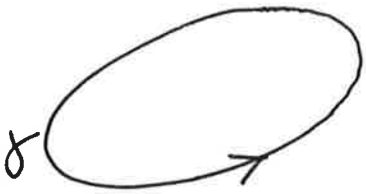
Kurvan genomlupen i omvänd riktning betecknas med $-\gamma$,

$$\int_{-\gamma} \vec{F}\, d\vec{r} = -\int_{\gamma} \vec{F}\, d\vec{r}$$

Är $\vec{F}$ t.ex. ett kraftfält, så är den fysikaliska tolkningen av kurvintegralen <u>arbete</u>.

(Då förstår man också förtecken ovan – vinna eller förlora energi för olika riktningar av rörelsen)

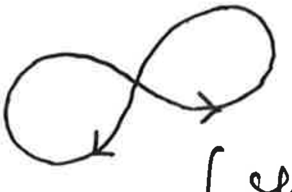
ej sluten kurva



<u>sluten kurva</u> –

då kallas integralen

$\oint_{\gamma} \vec{F}\, d\vec{r}$ <u>circulationen</u> av vektorfältet längs γ.

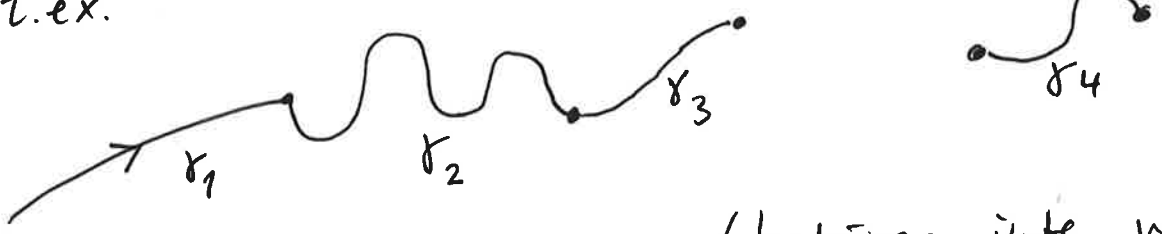


(sluten kurva, men ej enkel!)

Kurvintegraler längs <u>orienterade</u> punktmängder γ som är styckvis $\mathcal{C}^1$,

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$$

t.ex.



(behöver inte vara sammanhängande!)

(OBS — i <u>allmänhet</u> har kurvintegraler med samma begynnelse- och slutpunkt, men längs olika kurvor, <u>skilda</u> värden!)

Vi kan skriva $\vec{r}\,'(t)\,dt = \underbrace{\dfrac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}}_{=:\,\hat{T}} \cdot |\vec{r}\,'(t)|\,dt$

Kurvans <u>enhets</u>-<u>tangent</u>

$$ds = |\vec{r}\,'(t)|\,dt$$

$\uparrow$

bågelement

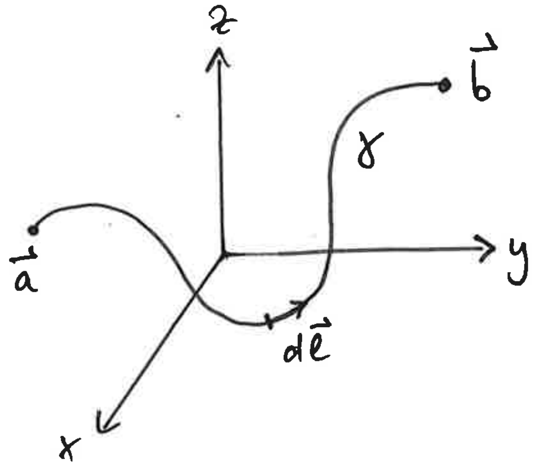
($\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ Skalärprodukten kan tolkas som längden av $\vec{a}$'s projektion på $\vec{b}$ multiplicerad med $\vec{b}$'s längd)

$$\rightarrow \quad I_\gamma = \int_\gamma \underbrace{\vec{F}\cdot\hat{T}}_{} \overbrace{ds}^{\vec{r}\,'(t)\,dt}$$

om t.ex. $\vec{F}$ är kraftfält, så är detta kraftens projektion i vägens riktning och $\vec{F} \cdot \hat{T}\, ds$ är arbetet vid en liten förflyttning.

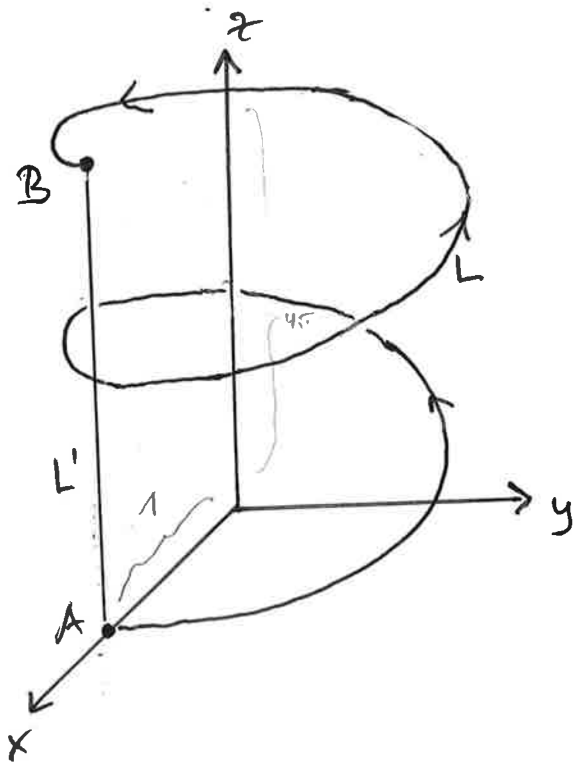
Integrationen ger arbetet för <u>hela</u> förflyttningen längs γ.

<u>I 3D är det samma sak:</u>



$\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r}$ i rymden!

<u>Exempel:</u>



Låt $\vec{F} = (-yz, xz, 2)$

Beräkna linjeintegralen längs L resp. L' från $A(1,0,0)$ till $B(1,0,4\pi)$

Kurvan L parametriseras

$$\vec{r} = (\overset{x}{\cos u}, \overset{y}{\sin u}, \overset{z}{u})$$

$u: 0 \to 4\pi$.

(skruvlinjen har radie 1 eftersom den går igenom A) integrationsgränserna följer av parameterframställning

$$\int_L \vec{F}\, d\vec{r} = \int_0^{4\pi} \vec{F}(\vec{r}(u)) \cdot \frac{d\vec{r}}{du}\, du$$

viktigt förklara

$x(u), y(u), z(u)$

$$\vec{F}(\vec{r}(u)) = (-u \sin u,\ u \cos u,\ 2)$$

← man använder parametriseringen i $\vec{F} = (-yz, xz, 2)$

$$\frac{d\vec{r}}{du} = (-\sin u,\ \cos u,\ 1)$$

$$\rightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}(u))\, \frac{d\vec{r}}{du} = u \sin^2 u + u \cos^2 u + 2$$

$$= u + 2$$

$$\rightsquigarrow \quad \int_L \vec{F}\, d\vec{r} = \int_0^{4\pi} (u+2)\, du = 8\pi^2 + 8\pi .$$

Och <u>längs vägen L'</u>, från A till B, som har parameterframställning

här har vi bara en annan parameter istället för u

$$\vec{r} = (\underset{x}{1}, \underset{y}{0}, \underset{z}{v})$$

$$v : 0 \to 4\pi \quad (\text{punkt } B!)$$

$$\vec{F}(\vec{r}(v)) = (0, v, 2)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dv} = (0, 0, 1)$$

$$\rightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}(v))\, \frac{d\vec{r}}{dv} = 2$$

$$\rightsquigarrow \quad \int_{L'} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_0^{4\pi} 2\, dv = 8\pi$$

$\neq$ vägen längs L!

vi ser att kurvintegralen beror på vägen!

En annan viktig kurvintegral, som ofta används i strömningslära, är

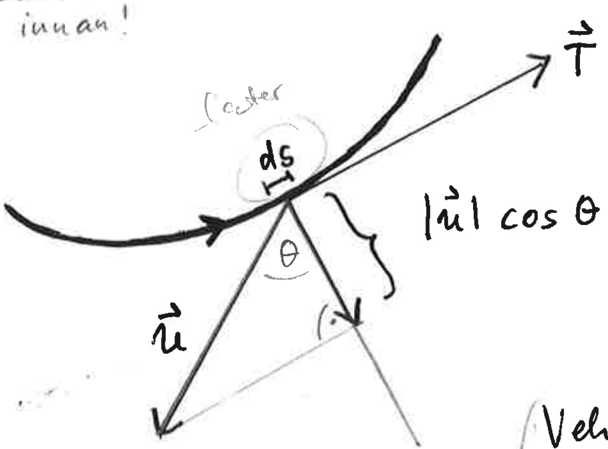
"^" betecknar "normalvektorn" (bara en konvention, hade kunnat skriva $\vec{N}$)

$$\int_\gamma \vec{u} \cdot \hat{N} \, ds$$

ett vektorfält $\vec{u}$

blanda inte ihop med parametern u som vi hade innan!

$\hat{N}$ är kurvans "<u>högernormal</u>" av längd 1.



$$|\vec{u}| \cos\theta = \underbrace{|\hat{N}|}_{1} \cdot |\vec{u}| \cos\theta = \underbrace{\vec{u} \cdot \hat{N}}_{\text{skalär}}$$

(Vektorn är alltså $(\vec{u} \cdot \hat{N}) \hat{N}$)

<u>Exempel</u>: Låt $\vec{u}$ beskriver <u>riktning</u> och <u>täthet</u> i en <u>materieströmning</u>, $\left(\frac{kg}{m\,s} \right)$

Så beskriver $\vec{u} \cdot \hat{N} \cdot ds$ den mängd av det strömmande mediet som per tidsenhet passerar genom stycket ds av kurvan.

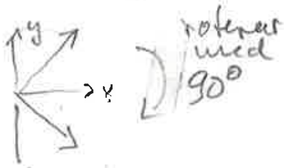
$\Rightarrow$ Integralen $\int_\gamma \vec{u} \cdot \hat{N} \, ds$ beskriver <u>flödet</u> $\left(\frac{kg}{s} \right)$ genom kurvan γ från vänster till höger sidan av kurvan. (diskuteras senare)

För enhetstangenten $\hat{T}$ gäller att

$$\left(\hat{T} = \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}\right) \quad \hat{T}\, ds = (dx, dy)$$

eftersom vi har $dS = |\vec{r}\,'(t)|\, dt$

$$\rightarrow \quad \hat{N}\, ds = (dy, -dx)$$



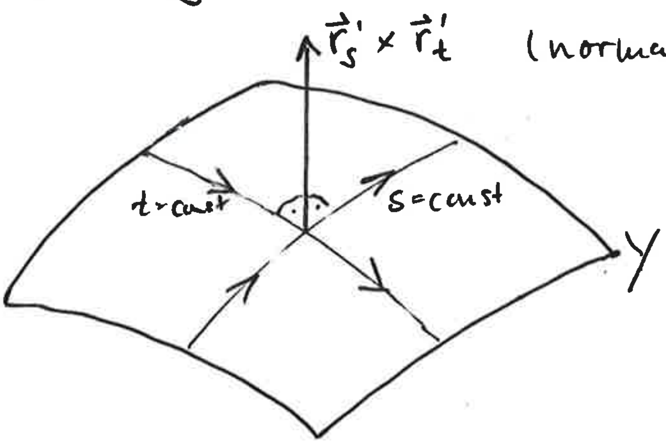
Om $\vec{u} = (u_1, u_2)$, så är

$$\int_\gamma \vec{u} \cdot \hat{N}\, ds = \int_\gamma -u_2\, dx + u_1\, dy$$

(Notera – byte av normalriktning ändrar tecknet på integr. värde)

3.4. Ytintegraler

Orientering av en yta $\vec{F}(s,t)$



(normalvektorn på ytan)

(riktningen väljas efter den önskade orienteringen av ytan. Beror även på parameterframställning).

Den sida av Y åt vilken normalvektorn pekar kallas den "positiva" sidan.

– Således bestämmer parameterframställningen orienteringen!

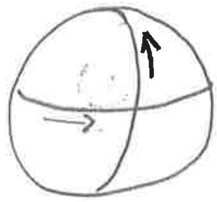
(i vissa fall kan man vara tvungen att ändra parametriseringen så att $\vec{r}_s\,' \times \vec{r}_t\,'$ pekar åt rätt håll).

Exempel: Sfär

$$\vec{r} = R(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$$

$$0 \le \theta \le \pi$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi$$



$R(\theta,\varphi)$

Se AB p.28

ppt folie

$$\vec{r}_\theta{}' \times \vec{r}_\varphi{}' = \dots = R\underbrace{\sin\theta}\,\vec{r}$$

$$0 \le \theta \le \pi$$

$$\Vert$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = R(\cos\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\sin\varphi,\ -\sin\theta)$$

$\rightsquigarrow \sin\theta \ge 0$

etc., ta kryssprodukt

$\rightsquigarrow$ Normalvektorn pekar ut från sfären.

Vi inser att sfäriska koordinater genererar en orientering med sfärens utsida som positiv.

En yta kallas orienterbar om man kan definiera den ena sidan som "plus"-sida, och andra som "minus"-sida.

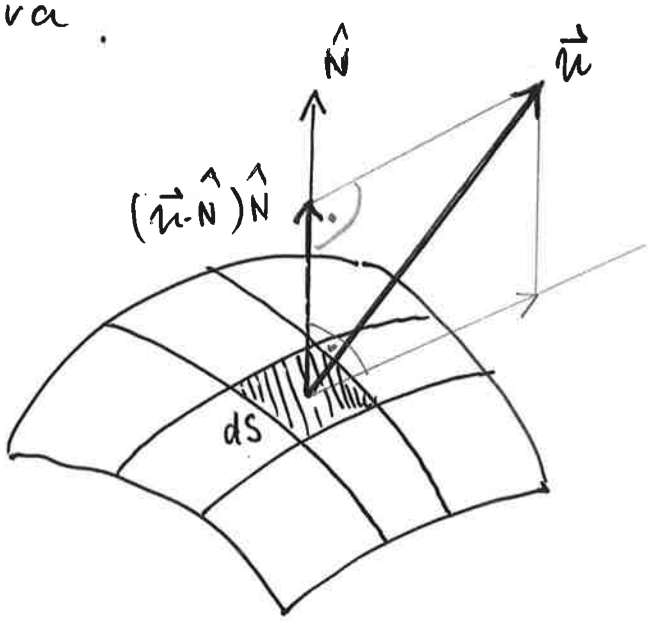
.ppt

Möbiusbandet etc.

Betrakta nu en strömning given av en strömtäthetsvektor $\vec{u}(\vec{r})$, enhet $\frac{kg}{m^2 s}$

↑ 2D!

Vi vill beräkna den mängd av en strömmande substans som per tidsenhet passerar genom ett visst orienterat ytstycke Y, från den negativa sidan till den positiva.



Enhetsnormal $\hat{N} = \hat{N}(\vec{r})$

Strömtäthetens komponent i normalriktningen är $(\vec{u}\cdot\hat{N})\cdot\hat{N}$.

<u>Flödet</u> genom ett litet areaelement dS

$$\vec{u}\cdot\hat{N}\cdot dS$$

(Komponenten som är parallell med ytan bidrar så klart inte!)

Hela flödet genom ytan Y är

$$\Phi = \iint_Y \vec{u} \cdot \vec{N} \, dS$$

Ibland använder man beteckningen

$d\vec{S}$ för $\vec{N} \, ds$

$\uparrow$

vektoriellt areaelement $d\vec{S}$, som har infinitesimal area, och normalriktning.

$$\rightarrow \quad \Phi = \iint_Y \vec{u} \, d\vec{S}$$

Ytintegralen beräknas genom att man utnyttjar en parameterframställning $\vec{r} = \vec{r}(s,t)$ av ytan.

$$\hat{N} = \frac{\vec{r}_s\,' \times \vec{r}_t\,'}{|\vec{r}_s\,' \times \vec{r}_t\,'|}$$

$$dS = |\vec{r}_s\,' \times \vec{r}_t\,'| \, ds\,dt$$ (vi hade detta tidigare i 1D)

$$\rightarrow \quad \hat{N} \, dS = (\vec{r}_s\,' \times \vec{r}_t\,') \, ds\,dt$$

$$\rightarrow \quad \iint_Y \vec{u} \cdot \hat{N} \cdot dS = \iint_D \vec{u}(\vec{r}(s,t)) \cdot (\vec{r}_s\,' \times \vec{r}_t\,') \, ds\,dt$$

p. 364 AB! $\boxed{\text{.ppt}}$ — dela upp yta i delytor, etc!

3.5. SYMMETRIER (tidigare avsnitt 4)

Innan man rutinmässigt introducerar parameterframställningar etc. i t.ex. ytintegralen kan det vara lönt att leta efter Symmetrier, eller andra egenskaper som förenklar integrationen. visa .ppt

Exempel 1

Ett inhomogent klot B med radien R och centrum i origo har densiteten

$$\rho(x,y,z) = ax + b \qquad (a, b \text{ konst.})$$

Beräkna dess massa.

$$m = \iiint_B (ax+b)\,\underbrace{dx\,dy\,dz}_{dV}$$

$$m = \underbrace{\iiint_B ax\,dx\,dy\,dz}_{0} + b\underbrace{\iiint dx\,dy\,dz}_{\text{Volymen av } B}$$

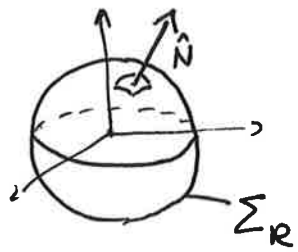
$$\rightarrow \quad m = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot b$$

Exempel 2 (se Analysboken p. 366)

Beräkna flödet Φ av fältet

$$\vec{u} = (x_1 + x_2, x_3, 0)$$

ut genom sfären Σ_R med medelpunkt i origo och radien R.



Yttre enhetsnormalen $\hat{N}$ i en punkt $\vec{r}$ på Σ_R är $\hat{N} = \dfrac{\vec{r}}{R}$

$$\rightarrow \quad \Phi = \iint_{\Sigma_R} \vec{u} \cdot \hat{N} \, dS =$$

$$= \iint_{\Sigma_R} (x_1 + x_2, x_3, 0) \cdot \frac{(x_1, x_2, x_3)}{R} \, dS$$

$$= \frac{1}{R} \iint_{\Sigma_R} (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2 x_3) \, dS$$

Vi inser att $\displaystyle\iint_{\Sigma_R} x_1 x_2 \, dS = \iint x_2 x_3 \, dS = 0.$

Av symmetriskäl är $\displaystyle\iint_{\Sigma_R} x_1^2 \, dS = \iint_{\Sigma_R} x_2^2 \, dS = \iint_{\Sigma_R} x_3^2 \, dS$

$$\rightarrow \quad \Phi = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{3} \iint_{\Sigma_R} \underbrace{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}_{|\vec{r}|^2 = R^2 \text{ på } \Sigma_R} \, dS = \frac{R}{3} \underbrace{\iint_{\Sigma_R} dS}_{4\pi R^2}$$

SE ÖVNINGAR FÖR FLER EXEMPEL!