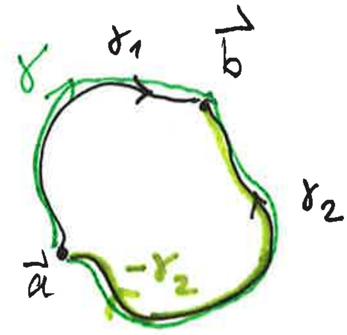
3.6. POTENTIALFÄLT

Låt $\vec{F} = (P, Q)$ vara ett vektorfält i en öppen mängd Ω. (dvs utan sin rand).



$$\underbrace{\int_{\gamma} \vec{F}\, d\vec{r}}_{=0} = \int_{\gamma_1} \vec{F}\, d\vec{r} - \int_{\gamma_2} \vec{F}\, d\vec{r}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \int_{\gamma_1} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{F}\, d\vec{r}$$

Kurvintegralen är <u>oberoende av vägen</u> om resultatet av integrationen för varje kurva i Ω <u>bara beror av</u> dess <u>begynnelse och slutpunkt</u>.

(och inte alls på kurvans väg i övrigt)

Ett ekvivalent sätt att säga detta är att kurvintegralen längs varje <u>sluten kurva</u> (här, γ_1 och $-\gamma_2$) i Ω är noll.

<u>dvs</u> $\displaystyle \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \underbrace{\mathcal{U}(\vec{b}) - \mathcal{U}(\vec{a})}_{=0 \text{ för } \vec{a} = \vec{b}\text{, sluten kurva.}}$

om kurvintegralen är oberoende av vägen γ.

Det vi beskriver när vi säger att kurvintegralen är oberoende av vägen, är en egenskap hos vektorfältet $\vec{F}(P,Q)$.

Elektriska fältet $\vec{E}$, t. ex. ha sådan egenskap.

alla vektorfält har inte det!

Låt oss nu karakterisera sådana fält för vilka kurvintegralen är oberoende av vägen.

DEFINITION

Vektorfältet $\vec{F}(P,Q)$ kallas ett potentialfält eller ett konservativt fält i det öppna området Ω, om det finns en C^1 funktion U i Ω sådan att

$$\vec{F} = \operatorname{grad} U$$

Funktionen U kallas då en potential till $\vec{F}$

Man använder ofta också följande terminologi:

Man säger att differentialformen (se förra föreläsning!) (p. 36)

$$P\,dx + Q\,dy$$

är "exakt" i Ω om det finns en $\mathcal{C}^1$-funktion U i Ω vars differential är

$$dU = P\,dx + Q\,dy$$

(eftersom $\int_{\vec a}^{\vec b} dU = U(\vec b) - U(\vec a)$)

Detta betyder

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = Q$$

dvs. $\boxed{(P, Q) = \operatorname{grad} U}$

(se kap. 2.7 i Analysboken, Differential)

Det är alltså ekvivalent att säga

" $\vec F = (P, Q)$ är ett potentialfält"

och

" differentialformen $P\,dx + Q\,dy$ är exakt"

Notera – ofta kallar man $-U$ för potentialen t.ex. i el-lära!

Potentialen till ett konservativt fält är <u>inte entydigt bestämd</u>:

$$\operatorname{grad}(U + \text{konst}) = \operatorname{grad} U$$

SATS:

Låt $\vec{F} = (P, Q)$ vara ett potentialfält med potentialen u i det öppna området Ω.
För varje kurva γ i Ω gäller då

$$\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r} = u(\vec{b}) - u(\vec{a})$$

begynnelse / slutpunkt γ

Speciellt är kurvintegralen

$$\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r}$$ oberoende av vägen!

Låt $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $\vec{r}(\alpha) = \vec{a}$, $\vec{r}(\beta) = \vec{b}$.

$$\alpha < t < \beta$$

$$\frac{d}{dt} u(\vec{r}(t)) \overset{\text{kedjeregel}}{=} \text{grad } u(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) =$$

$$\overset{\text{potentialfält}}{=} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) \qquad (*)$$

$$\rightarrow \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{r}(t))\, \vec{r}\,'(t)\, dt =$$

$$\overset{(*)}{=} \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt} u(\vec{r}(t))\, dt =$$

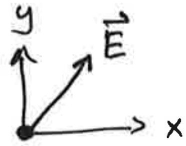
$$= u(\vec{r}(\beta)) - u(\vec{r}(\alpha)) = u(\vec{b}) - u(\vec{a})$$

(v.s.v.)

(bemärk – en additiv konstant har ingen inverkan på potentialskillnaden $u(b) - u(a)$).

Exempel.

Låt $\vec{E}$ vara det elektrostatiska fältet runt en oändlig lång, rak tråd med en likformig positiv laddnings-fördelning längs z



$\left[\frac{V}{m}\right]$

$$\vec{E} \propto \frac{(x,y)}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

$$\vec{E} = \operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) u(x,y) =$$

$$\propto \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

Vi ser att $u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C$

satisfierar detta,

$\left(\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x,\right.$ analog för $\left.y\right)$.

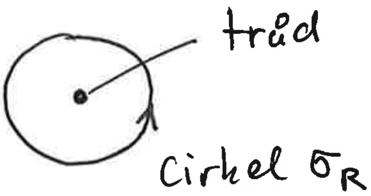
Fältet $\vec{E}$ är alltså konservativt!

Exempel

$\vec{B} = \mu \vec{H}$, $[\vec{H}] = [A/m]$ [CGS: örsted för [H]].

Magnetfält $\vec{B}$ kring en oändligt lång rak ledare genomfluten av en konstant ström. (enligt Biot-Savarts lag).

$$\vec{B} \propto \frac{(-y,x)}{x^2+y^2} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$



$x = R\cos t$

$y = R\sin t$

$$\int_{\sigma_R} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_{\sigma_R} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} dt \, \frac{R^2(-\sin t)(-\sin t) + R^2 \cos t \cos t}{R^2\,(\cos^2 t + \sin^2 t)}$$

$$= \int_0^{2\pi} dt = \underline{\underline{2\pi}}$$

dvs $\vec{B}$ är <u>inte</u> konservativt.

Integralen är inte noll för σ_R,

$\vec{B}$ saknar potential!

(efter Satsen ovan — kurvan är sluten, dvs resultatet måste vara 0.)

(senare kommer vi diskutera vektorpotentialen $\vec{A}$)

(notera — för <u>vissa</u> kurver γ

kan man visst få $\int_\gamma \vec{B}\, d\vec{r} = 0$,

men detta är då alltså inte oberoende

av vägen.

Vi diskuterade innan att <u>konservativa</u>

<u>fält</u> har kurvintegraler som är

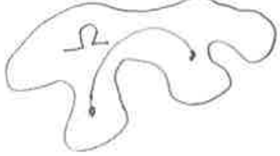
oberoende av vägen.

Inga andra fält än konservativa har denna egenskap.)

SATS:

> Låt $\vec{F} = (P, Q)$ vara ett kontinuerligt vektorfält definierat i en bågvis sammanhängande öppen mängd Ω.
> Om kurvintegralen
> $\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r}$ är oberoende av vägen
> så har $\vec{F}$ en potential i Ω.

alla par av punkter kan förbindas med en kurva



(Bevis se Analysboken p. 349!)

Hur vet man om ett givet vektorfält $\vec{F} = (P, Q)$ är konservativt?

(att konstruera en potential är inte alltid enkelt!)

Låt $\vec{F}(P, Q)$ vara ett potentialfält i Ω, dvs. antag att det finns en funktion U så att

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q \qquad (\text{grad!})$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Detta leder till en viktig

SATS:

Antag att fältet $\vec{F} = (P, Q)$ har en potentialfunktion u av klass C^2 i Ω.

Då är $$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (x, y \in \Omega)$$

nödvändigt för att (P,Q) skall vara potentialfält

dvs. är derivaterna inte lika, kan vi genast slå fast att fältet inte är konservativt.

Tyvärr är detta inte tillräckligt för existensen av en potentialfunktion.

(se exempel för $\vec{B}$ ovan!)

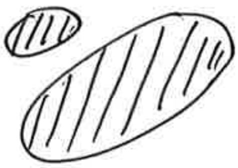
Men – det finns en annan sats som hjälper,

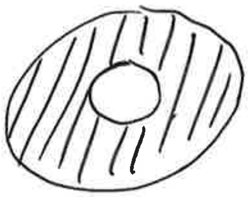
SATS

(man ser igen – för $\vec{B}$ exkluderade vi origo! Men derivatorna var lika, men ändå inte potentialfält)

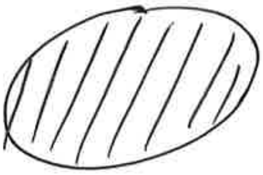
Om vektorfältet $\vec{F} = (P,Q)$ uppfyller villkoret $$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (x,y) \in \Omega,$$ och om Ω är en enkelt sammanhängande öppen del av planet så har $\vec{F}$ en potential i Ω.

ej sammanhängande:





ej <u>enkelt</u> sammanhängande



<u>enkelt</u> sammanhängande

(diskuterar $\vec{B}$ igen, för länge sedan, där origo exkluderades.)

<u>I TRE DIMENSIONER:</u>

Kom ihåg kurvintegralen i 3D, som vi diskuterade tidigare.

"<u>Potentialfält</u>" eller "<u>Konservativt fält</u>" $\mathcal{U}$

$$\vec{F} = \text{grad}\, \mathcal{U} = \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}, \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} \right)$$

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \mathcal{U}(\vec{b}) - \mathcal{U}(\vec{a})$$

om $\vec{F}$ är potentialfält, som innan.

$$d\mathcal{U} = \underbrace{F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz}_{\text{exakt differentialform}}$$

– precis likadant som i 2D!

Exempel i 3D:

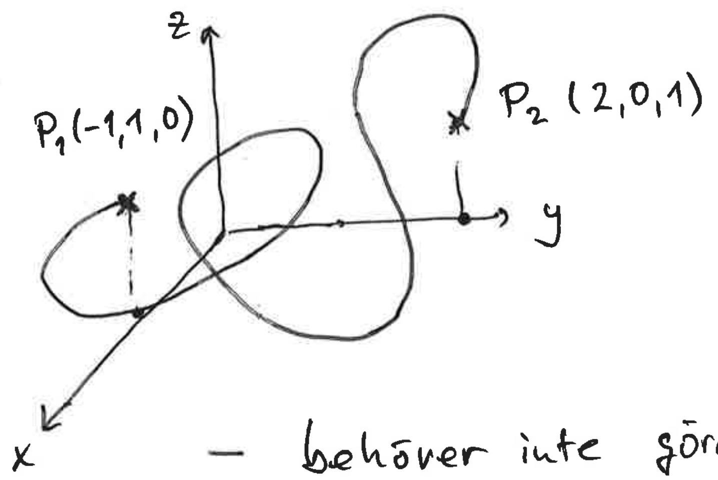
Vektorfältet

$$\vec{A} = \left(2y^2,\ 4xy + y^2 z^2,\ \tfrac{2}{3} y^3 z + z\right)$$

har potentialen

$$\Phi = 2xy^2 + \frac{1}{3} y^3 z^2 + \frac{1}{2} z^2 + \text{const.}$$

Beräkna linjeintegralen längs L,



– behöver inte göra mycket, eftersom vektorfältet har potential.

$$\int_L \vec{A}\, d\vec{r} = \Phi(2,0,1) - \Phi(-1,1,0) = \frac{5}{2}.$$

Och om γ är en sluten kurva, så får vi noll!

TILLBAKA TILL TVÅ DIMENSIONER.

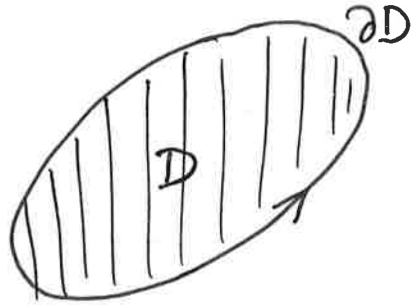
3.5. GREEN'S FORMEL (2D)

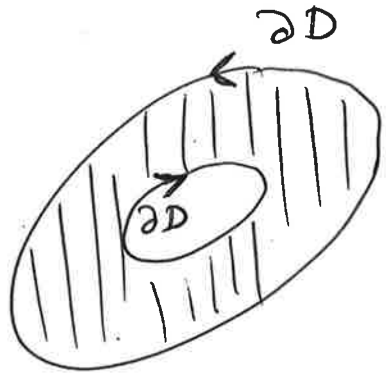
För varje någorlunda okomplicerat område D i planet kan vi uppfatta dess rand ∂D som en kurva (eventuellt bestående av flera kurvbitar).

Orienterar randen så att området D ligger till vänster om kurvan.

Vi kaller detta positiv orientering

(i litteraturen används ofta symbolerna $\oint_{\partial D}$ eller $\ointctrclockwise_{\partial D}$ för integralen)





området till vänster om kurvan!

GREEN'S FORMEL (2 DIM.)

Låt $P(x,y)$ och $Q(x,y)$ vara två $\mathscr{C}^1$ funktioner definierad i en öppen mängd Ω i planet.

Om det kompakta delområdet D av Ω har en rand ∂D (som utgöras av en eller flera styckvis $\mathscr{C}^1$- kurvor) och som är positiv orienterad, så

GREEN'S FORMEL

$$\boxed{\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy}$$

(Beviset i AB, p.336, är inte svår men långvålig. Vi kan göra detta på ett mycket enklare sätt.)

Men, låt oss först titta på två exempel.

(Beviset följer sen!)

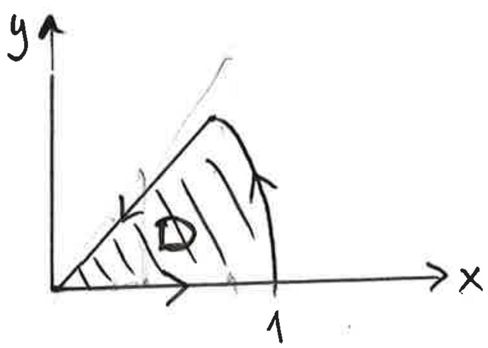
Exempel 1:

Beräkna kurvintegralen

$$\int_{-\gamma} -y^3\,dx + x^3\,dy$$ längs γ, kring arean

$x^2+y^2 \leq 1$

$0 \leq y \leq x$



Lösning med Green's formel förkortar beräkningen avsevärt!

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -3y^2$$

$$\rightarrow \int_\gamma \underbrace{-y^3}_{P} dx + \underbrace{x^3}_{Q} dy = \iint_D (3x^2 + 3y^2)\, dx\, dy$$

Cyl. Coord.

$$\overset{\downarrow}{=} \iint_{\substack{0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}}} 3r^2 \, r \, dr \, d\varphi = \frac{3\pi}{16}.$$

<u>Exempel 2:</u>

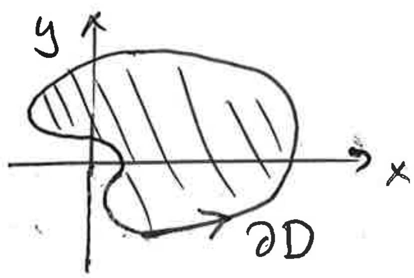
Vi diskuterade innan magnetfältet kring en rak ledare,

$$\vec{B} = \frac{(-y, x)}{x^2 + y^2} \quad (P, Q) \qquad (x, y) \neq (0, 0)$$

Vi vill nu visa att

$$\int_{\partial D} \vec{B}\, d\vec{r} = 0$$

för varje kompakt område D som inte innehåller origo



$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial P}{\partial y}$$

Derivatorna är lika!

$$\int_{\partial D} \vec{B}\, d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\right) dx dy$$

$$= 0 \; !$$

Trots allt är det inte ett potential fält.

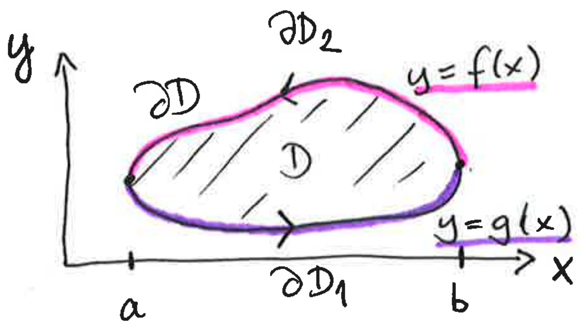
Notera: I samband med Green's formel måste man alltid noga kontrollera att P och Q är definerade och av klass C^1 i hela området D.

T. ex. utgör magnetfältet kring en rak ledare exempel på ett fält $\vec{F}(P, Q)$ som är definerad överallt utom en enda singulär punkt!

(här inser vi att det spela roll att vi begränsa diskussionen till 2D! Sammandragbar bana i 3D. Exempel fra QM!)

— och nu, till Beviset!

Bevis av Green's formel.



$$\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

$$d\vec{r} = (dx, dy) \quad \leadsto \quad \oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \oint_{\partial D} (P, Q)\,d\vec{r}\,.$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

löpande integrationsgränserna längs y.

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{f(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy \right) dx$$

här, x är const så flit är y.

$$= \int_a^b \Big[P(x,y) \Big]_{g(x)}^{f(x)}\,dx$$

$$= -\int_a^b \Big(P(x, f(x)) + P(x, g(x)) \Big)\,dx$$

Låt oss jämföra detta med linjeintegralen av fältet $(P, 0)$ längs ∂D.

Vi delar ∂D i två delar:

∂D_1: $\vec{r}(x) = (x, g(x))$ $\qquad x: a \to b$

∂D_2: $\vec{r}(x) = (x, f(x))$ $\qquad x: b \to a$

Later: vi tittar bara på P-delen

$$\to \left(\oint_{\partial D} P\,dx = \right) \oint_{\partial D} (P,0)\,d\vec{r} =$$

$$= \int_{\partial D_1} (P,0)\,d\vec{r} + \int_{\partial D_2} (P,0)\,d\vec{r} =$$

$\frac{d\vec{r}}{dx}dx = \vec{r}\,'(x)\,dx$, $\vec{r} = (x, g(x))$

$P = P(\vec{r}) = P(x, g(x))$ för vägen $a \to b$

$$= \int_a^b (P,0)\cdot(1, g'(x))\,dx +$$

$P = P(\vec{r}) = P(x, f(x))$ för vägen $b \to a$

$$+ \int_b^a (P,0)\cdot(1, f'(x))\,dx$$

$$= \int_a^b P(x, g(x)) - P(x, f(x))\,dx.$$

Låt oss jämföra med tidigare resultat –

vi ser att

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \oint_{\partial D} (P,0)\,d\vec{r}$$

På liknande sätt kan man visa att

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{\partial D} (0,Q)\,d\vec{r}.$$

$$\Longrightarrow \boxed{\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_{\partial D} (P,Q)\,d\vec{r}}$$

GREEN'S FORMEL

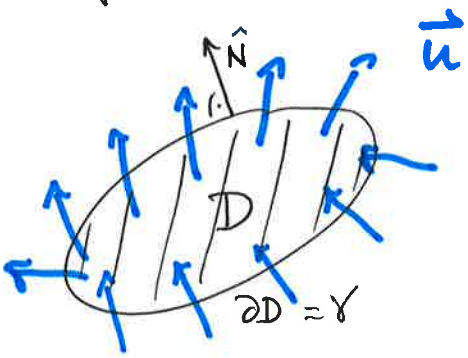
(Repetition / intro- studier upp till Greens formel i 2D 64
2015

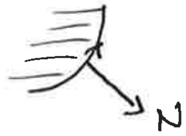
TVÅDIMENSIONELLT FLÖDE

Vi har tidigare studerat

$$\int_\gamma \vec{u}\cdot\vec{N}\,ds$$ flödet av $\vec{u}=(u_1,u_2)$ genom γ, från "vänster" till "höger"

$$= \int_\gamma -u_2\,dx + u_1\,dy$$





Låt D vara ett område med positivt orienterad rand $\partial D.=\gamma$

$$\oint_{\partial D}(P,Q)\,d\vec{r} = \oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy$$

Med Green's formel: "P" "Q"

$$\int_{\partial D} \vec{u}\cdot\hat{N}\,ds = \int_{\partial D} -u_2\,dx + u_1\,dy =$$

"$\partial Q/\partial x$" "$-\frac{\partial P}{\partial y}$"

$$\overset{\text{Greens formel}}{=} \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)}\,dx\,dy \qquad (*)$$

Vi noterar - detta liknar ju divergensen i 2D!

$\hat{N}\,ds=(dy,-dx)$
p. 42

(*) beskriver flödet genom γ.

Vi antar nu att $\vec{u}$ är en stationär, dvs. tidsoberoende strömning av något medium.

Flödet > 0 betyder då att det strömmar mer materia ut än det strömmer in.

Detta får ju bara om det produceras "materia" i D.

Vi inser att $\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}$ mäter den lokala produktionen av den strömmande substansen!

På motsvarande sätt sker "konsumtion" i D om flödet (ut ur) D är negativt.
(tidigare ppt med divergensen!)

Green's formel gäller bara i 2D.

Divergensen definierade vi även i 3D.

Skulle man kunna göra samma resonemang i 3D?

↪ Vi studerar nu Gauß' Satz.

5. GAUSS' SATS

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ i 3D.

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

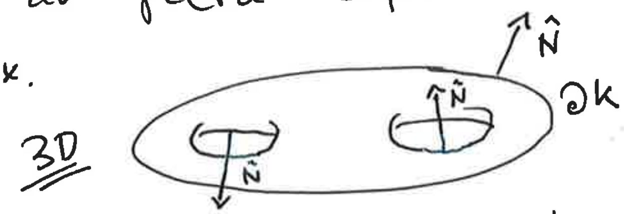
Vi vil nu titta på motsvarigheten till flödesintegralen $(*)_{p.60'}$ i 3D.

$$\iint_{\partial K} \vec{u} \cdot \hat{N} \, dS$$

∂K begränsningsyta av ett kompakt område K i rummet

Normalen $\hat{N}$ pekar ut från K.

∂K kan bestå av flera separata ytstycken, t. ex.



— en pannkaka med två hål.

$\hat{N}$ är "högernormal".

(visa gammal ppt med roterande bovner)

GAUSS' SATS:

Låt $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vara ett C^1-fält, definierat i en öppen mängd Ω i rummet.
Om det kompakta området $K \subset \Omega$ har en rand ∂K som består av en eller flera C^1-ytor och som är orienterad med utåtriktad normal, så gäller att

$$\boxed{\iint_{\partial K} \vec{u} \cdot \hat{N} \, dS = \iiint_{K} \operatorname{div} \vec{u} \, dx_1 dx_2 dx_3}$$