Tolkning av divergenssatsen.

Låt $\vec{y}$ vara en punkt i Ω,
och K ett klot $B_\varepsilon(\vec{y})$ med radie ε, $\varepsilon > 0$
och medelpunkt $\vec{y}$.
klotet har volym $\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3$.

div $\vec{u}(\vec{x})$ är en kontinuerlig funktion.
($\vec{u}$ måste vara C^1)

I analogi med "envariabelanalysens huvudsats",
har vi i 3D en liknande relation:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \iiint_{B_\varepsilon(\vec{y})} \operatorname{div} \vec{u} \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = \operatorname{div} \vec{u}(\vec{y})$$

$\parallel$ Gauß

$$\iint_{\partial B_\varepsilon(\vec{y})} \vec{u} \cdot \hat{N} \, dS$$

oberoende av koordinatsystem!
$\rightarrow$ div $\vec{u}$ är alltså också oberoende av valet av ortonormerat system!

Om $\vec{u}$ är stationär strömning, mäter vänsterledet av ekv., ovan flödet per volymsenhet $B_\varepsilon(\vec{y})$ ut ur detta klot!

Vi inser att

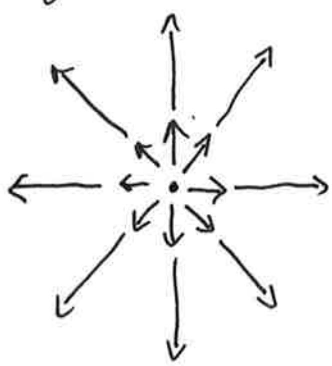
div $\vec{u}(\vec{y})$ är ett mätetal för "produktionen" i punkten $\vec{y}$ <u>per</u> <u>volyms-enhet</u> av det strömmande mediet.

div $\vec{u}$ kallas därför strömningens "<u>Källtäthet</u>", enhet $\frac{kg}{m^3 s}$ eller $\frac{J}{m^3 s}$

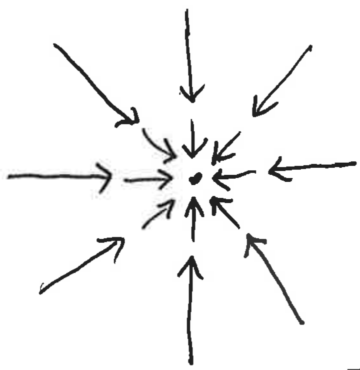
Vektorfält för vilka <u>div $\vec{u} = 0$</u> benämnas "<u>källfria</u>".

I områden där div $\vec{u} < 0$ konsumeras (förintas) den strömmande substansen.
Man talar då om förekomsten av "sänkor".

På samma sätt pratar man om <u>källor</u> när div $\vec{u} > 0$.



Källa div $\vec{f} > 0$



<u>Sänka</u> div $\vec{f} < 0$

Låt oss nu använda Gauß' sats.

Exempel 1 Beräkna flödet av

$\vec{u} = (x_1 + x_2, x_3, 0)$ ut ur klotet $K = \{\vec{x}, |x| \le R\}$

$\operatorname{div} \vec{u} = 1$

$$\rightsquigarrow \iint_{\partial K} \vec{u} \cdot \hat{N}\, dS = \iiint_K 1 \cdot dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Gauß' sats gör lösningen av problemet till en trivialitet!

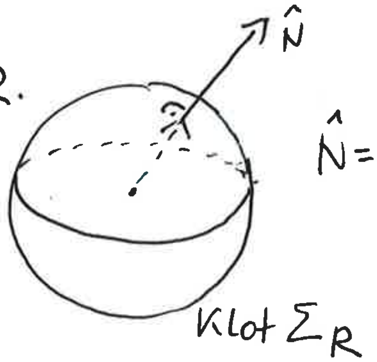
Men man måste akta sig – det finns fallgropar!

Exempel 2

Elektrostatiska fältet $\vec{E}$ runt en punkt-laddning i origo

$$\vec{E} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{(x_1, x_2, x_3)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \qquad \underline{\underline{\vec{r} \neq 0}}$$

På sfären Σ_R är $\vec{E} = \dfrac{\vec{r}}{R^3}$ då $|\vec{r}| = R$.



$\hat{N} = \dfrac{\vec{r}}{R}$

$$\iint_{\Sigma_R} \vec{E}\, \hat{N}\, dS = ?$$

Flödesintegralen är enkelt att beräkna i detta fallet: $\hat{N} = \dfrac{\vec{r}}{R}$, och vi har

$$\rightarrow \iint_{\Sigma_R} \vec{E}\,\hat{N}\, dS = \iint_{\Sigma_R} \frac{\vec{r}}{R^3}\cdot\frac{\vec{r}}{R}\, dS =$$

$$= \frac{1}{R^4}\iint_{\Sigma_R} |\vec{r}|^2\, dS \underset{\substack{\uparrow \\ \text{på sfären, } |\vec{r}|=R}}{=} \frac{1}{R^2}\iint_{\Sigma_R} dS = \underline{\underline{4\pi}}. \quad (*)$$

Låt oss nu använda Gauß' Sats för samma ändamål,

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1}{|\vec{r}|^3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{x_2}{\vec{r}^3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{x_3}{\vec{r}^3}\right) =$$

$$= \ldots = 0 \quad \text{(räkna själv!)}$$

Fältet $\vec{E}$ är alltså källfritt utanför origo.

$$\iint_{\partial K} \vec{E}\,\hat{N}\, dS = \iiint_K \operatorname{div}\vec{E}\; dx_1\, dx_2\, dx_3 = \underline{\underline{0}}$$

Stämmer inte överens med (*)!

Vad är fel här ?!

→ <u>Svar</u>: <u>Vi har använt Gauß' Sats på ett område som innehåller en singulär punkt!</u>

<u>I origo är $\vec{E}$ odefinierad!</u>

6. STOKES' SATS.

se tidigare avsnitt p.42 – flödet genom kurva!

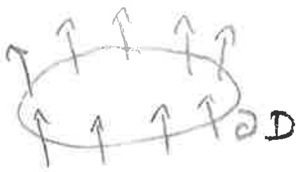
Vi repeterar –

Green's formel i planet

pga. $\hat N$

$$\hat N dS = (dx_2, -dx_1)$$

$$\underbrace{\int_{\partial D} \vec u \, \hat N \, dS}_{\text{flödet av } \vec u \text{ genom randen } \partial D} = \int_{\partial D} -u_2\, dx_1 + u_1\, dx_2 =$$



("genom"-variant)

$$= \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)}_{\text{som div } \vec u \text{ i 2 dim.}} dx_1 dx_2$$

dvs. Gauß' Satz kan betraktas som en generalisering av Green's formel i planet till 3 dimensioner.

Men, vi hade även en annan variant:

$$\underbrace{\int_{\partial D} \vec u \, d\vec r}_{\substack{\text{av fältet } \vec u \text{ avgivna energin vid} \\ \text{circulation längs } \partial D}} = \iint_D \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \quad (*)$$

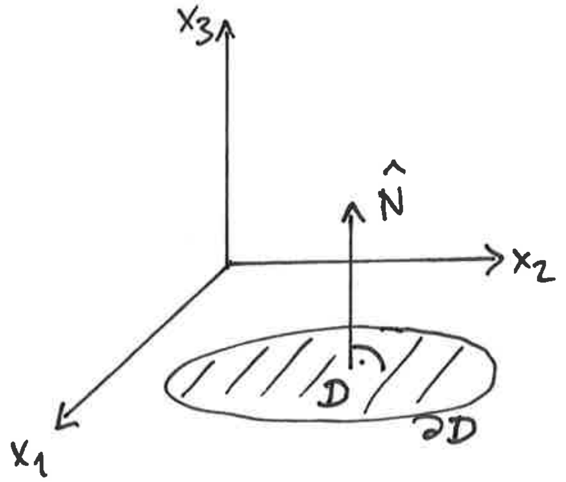
("längs"-variant)

Green's formel var

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} (P, Q)\, d\vec r$$

Låt oss nu försöka tolka detta i 3 dimensioner.

Betrakta en normalvektor $\hat{N} = (0,0,1)$, och ett fält $\vec{v} = \left(0, 0, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$.



Flödet av fältet $\vec{v}$ genom D:

$$\underbrace{\iint_D \vec{v}\,\hat{N}\,dS}_{\text{flöde av } \vec{v} \text{ genom den plana ytan } D} = \iint_D \left(0,0,\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)(0,0,1)\,dS$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\underbrace{dS}_{= dx_1\,dx_2}$$

– och detta är ju samma som (∗) ovan!

Vad påminner oss högersidans integrand om ?!

— visst, 3. komponenten av en kryssprodukt!

Har man t.ex. i 2 dimensioner ett fält

$$\vec{u} = (\underbrace{u_1(x_1), u_2(x_2)}_{2\text{-dim!}}, 0)$$

Så är

$$\text{rot } \vec{u} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$$

(kom ihåg - cykl.)

$$= \left(0, 0, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$$

$$= \underline{\underline{\vec{v}}} \ !$$

Låt oss nu använda detta i ekvationen ovan —

– Så vi kan faktiskt skriva

$$\iint_D \vec{v}\ \hat{N}\ dS = \iint_D \text{rot}\ \vec{u}\ \hat{N}\ dS$$

|| visat innan

$$\int_{\partial D} \vec{u}\ d\vec{r}$$

Så vi ser i 2D att Green's formel leder till

$$\boxed{\int_{\partial D} \vec{u}\ d\vec{r} = \iint_D (\text{rot}\ \vec{u}) \cdot \hat{N}\ dS.}$$

Vi vill nu generalisera detta till 3D!

STOKES' SATS

Låt $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vara ett $\mathcal{C}^1$-fält definierad i en öppen mängd Ω i rummet. Om Y är ett orienterat ytstycke i Ω med orienterad rand ∂Y så gäller att

$$\int_{\partial Y} \vec{u}\ d\vec{r} = \iint_Y (\text{rot}\ \vec{u}) \cdot \hat{N}\ dS$$

Notera analogien

2 versioner Green's i 2D $\Longleftrightarrow$ Gauss & Stokes i 3D

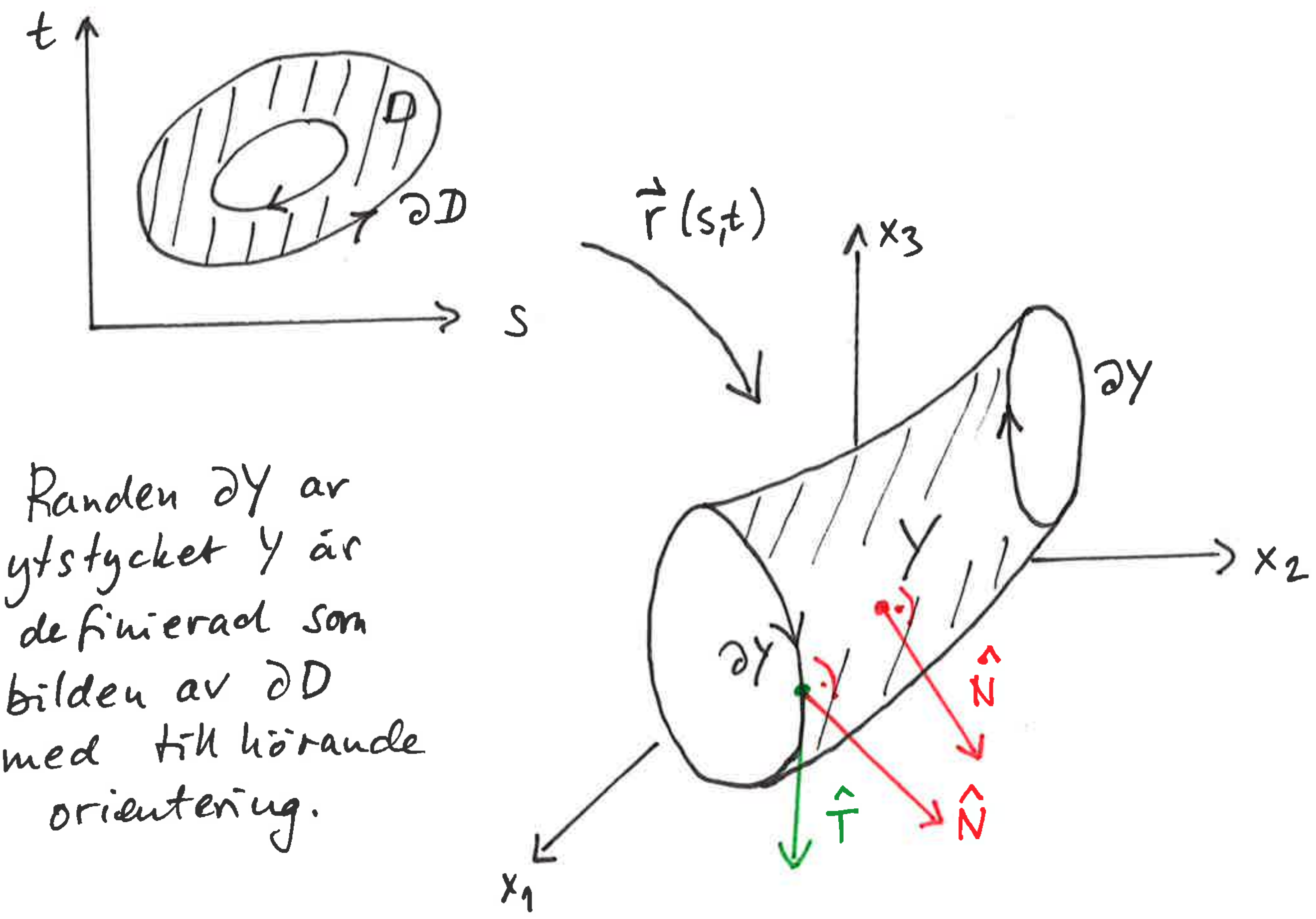
!

Men – vad är ett <u>orienterad</u> ytstycke?

Antag att den orienterade $\mathcal{C}^1$-ytan Y har en parametrisering $\vec{r} = \vec{r}(s,t)$, där $(s,t) \in D$.

D är en kompakt delmängd av (s,t) planet. med positivt orienterad rand ∂D.

Vi kan uppfatta Y som bilden av D under avbildningen $(s,t) \longrightarrow \vec{r}(s,t)$:



Randen ∂Y av ytstycket Y är definierad som bilden av ∂D med tillhörande orientering.

$\longrightarrow$ "orienterad ytstycke med orienterad rand".

En normalvektor som rör sig längs ∂Y i positiv riktning har <u>ytan till vänster</u> om sig! Vektorn $\hat{N} \times \hat{T}$ pekar "in mot ytan".

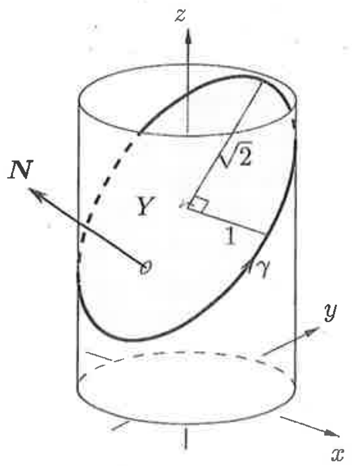
(Se Extramaterial för beviset av Stokes' sats!)

Istället tittar vi här på ett <u>exempel</u>.

<u>Använd Stokes' sats</u> för att beräkna

$$\int_{\gamma} \vec{u}\, d\vec{r} \qquad \text{där} \qquad \vec{u} = (3z, 5x, -2y)$$

och γ är skärningen mellan cylindern $x^2+y^2=1$ och planet $z = y+3$, orienterad <u>moturs</u> sedd uppifrån.



Först beräkna vi $\text{rot}\, \vec{u} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 3z & 5x & -2y \end{vmatrix} = (-2, 3, 5).$

$x^2+y^2=1$ begränsar x, y till circeln av cylindern, som på bilden.

på <u>ellipsen</u> är $z = y+3$

$$f(x,y) = z = y+3$$

$$\rightarrow \quad z - y - 3 = 0$$

Normalen till nivåytan:

$$\hat{N} = \frac{\text{grad}\,(z-y-3)}{|\text{grad}\,(z-y-3)|} = \frac{(0,-1,1)}{\sqrt{2}}$$

– passar bra, har positiv z-komponent!

(Sätter vi $y+3-z=0$, så är
$\hat{N} = \frac{(0,1,-1)}{\sqrt{2}}$ som pekar åt fel håll).

$$\int_\gamma \vec{u}\,d\vec{r} = \iint_Y (\text{rot}\,\vec{u})\,\hat{N}\,dS =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_Y (-2,3,5)(0,-1,1)\,dS$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \underbrace{\iint_Y dS}_{\text{ellips-skiva med halvaxlarna } \sqrt{2} \text{ och } 1.} = \frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\,\pi = 2\pi.$$

Var försiktigt med riktningen på γ och $\hat{N}$!

(högerhands-regeln).