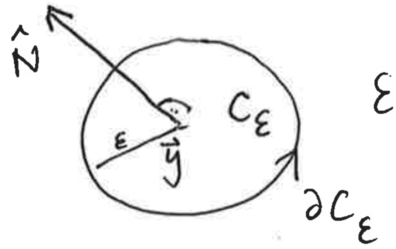
# Tolkning av vektorn rot $\vec{u}$

Vi väljer en punkt $\vec{y}$ i $\Omega$

$|\hat{N}| = 1$




$\varepsilon > 0$

Cirkelskiva $C_\varepsilon$
med radie $\varepsilon > 0$
$\vec{y}$ i centrum

$$\int_{\partial C_\varepsilon} \vec{u}\, d\vec{r} = \iint_{C_\varepsilon} (\text{rot}\, \vec{u}) \cdot \hat{N}\, dS \qquad \text{(2d variant)}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \iint_{C_\varepsilon} (\text{rot}\, \vec{u})\, \hat{N}\, dS = \text{rot}\, \vec{u}(\vec{y}) \cdot \hat{N}$$

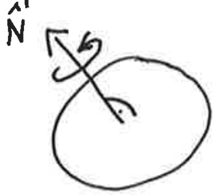
Anta att $\vec{u}$ är ett kraftfält och $\text{rot}\, \vec{u}(\vec{y}) \neq 0$

$\iint_{C_\varepsilon} (\text{rot}\, \vec{u}) \hat{N} dS$ är då <u>arbetet</u> per areaenhet $C_\varepsilon$,

dvs arbetet som uträttas vid cirkulation av en enhetspartikel ett varv längs $\partial C_\varepsilon$.

Gränsvärdet är <u>störst</u> när $\text{rot}\, \vec{u} \parallel \hat{N}$
(Skalär~~produkt~~ med cos!)

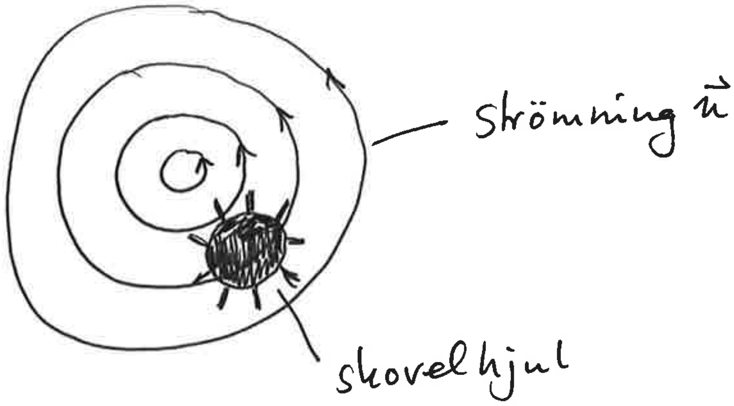
dvs.




störst när cirkulations axeln sammanfaller med rot $\vec{u}$.

rot $\vec{u}(\vec{y})$ beskriver virveltendensen av fältet $\vec{u}$ i punkten $\vec{y}$.

$|\text{rot}\,\vec{u}(\vec{y})|$ är ett mått på virvelns styrka.




Största effekten när hjulet riktas så att det är parallellt med vektorn rot $\vec{u}(\vec{y})$.

Fält för vilka rot $\vec{u} = 0$ i hela definitionsmängden kallas virvelfria.

Vi pratade tidigare om potentialer.

$$\vec{u} = \text{grad}\, u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

potential till $\vec{u}$

Om $\vec{u} = \text{grad}\, u$, så är ju rot(grad $u$) $= 0$,

dvs. rot $\vec{u} = 0$!

Detta är ett mycket enkelt nödvändigt villkor för att $\vec{u}$ skall vara potentialfält!

# KONTINUITETSEKVATIONEN.

Låt $\vec{u}(\vec{x},t)$ vara strömtäthetsvektorn

(med enheter $\frac{kg}{m^2 s}$ eller t. ex. $\frac{J}{m^2 s}$ )

Låt $p(\vec{x},t)$ beteckna

produktionen (med enheter $\frac{kg}{m^3 s}$ eller $\frac{J}{m^3 s}$ )

av det strömmande mediet

som sker i området $\Omega$.

Stationära fallet då $\vec{u}$ inte

beror av $t$ :

$$\operatorname{div} \vec{u} = p$$

Hur ser denna balansekvationen

ut i det icke-stationära fallet?

Finns många exempel från

Hydrodynamik

Elektrodynamik

och även Kvantmekanik!

## Icke-stationära fallet

Låt $B$ vara ett godtyckligt klot $\subset \Omega$.

pga materiens/energins oförstörbarhet gäller för substansen i $B$ vid varje tidpunkt att

ökning (av substans i B) per tidsenhet $=$ totala produktionen i klotet B $-$ utflöde ut ur B

$$\frac{d}{dt}\iiint_B \varrho \, dx\,dy\,dz \qquad \iiint_B p \, dx\,dy\,dz \qquad \iint_{\partial B} \vec{u}\cdot\hat{N}\, dS$$

$$\frac{d}{dt}\iiint_B \varrho \, dx\,dy\,dz = \iiint_B \frac{d\varrho}{dt}\, dx\,dy\,dz$$

$$\iint_{\partial B} \vec{u}\cdot\hat{N}\, dS \overset{\text{GAUSS}}{=} \iiint_B \operatorname{div}\vec{u}\, dx\,dy\,dz$$

$$\Rightarrow \iiint_B \left(\frac{\partial\varrho}{\partial t} - p + \operatorname{div}\vec{u}\right)\underbrace{dx\,dy\,dz}_{\neq 0} = 0$$

$B$: godtyckligt klot

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial\varrho}{\partial t} - p + \operatorname{div}\vec{u} = 0}$$

Kontinuitets-ekvationen

Grundläggande vid alla studier av strömning!

## Exempel: Diffusion

Diffusion är en speciell form av strömning av något ämne

Vi vill beräkna det diffunderande ämnets Koncentration $q(\vec{x}, t)$ i punkten $\vec{x}$ vid tiden $t$.

↑ motsvarar $\rho$ i kontinuitetsekv.!

**Fick's lag** (empiriskt!)

$$\vec{u} = -D \operatorname{grad} q(\vec{x}, t)$$

Strömningsvektor vid diffusion

Diffusions-konstanten

- diffusionsströmmen i varje punkt går i den riktning i vilken koncentrationen avtar snabbast

- strömstyrkan är proportionell mot koncentrations förändringen.

Vi antar att $D$ är oberoende av $\vec{x}$ och $t$.

$$\rightarrow \quad \frac{\partial q}{\partial t} - D \operatorname{div} \operatorname{grad} q = P$$

produktion av det strömmande mediet $\frac{kg}{m^3 s}$ eller $\frac{J}{m^3 s}$

Vi vet att $\vec{\nabla} f = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} f, \frac{\partial}{\partial x_2} f, \frac{\partial}{\partial x_3} f \right)$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = \Delta f$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\frac{\partial q}{\partial t} - D \cdot \Delta q = p}$$

Diffusionsequationen

$\uparrow$ produktion av det strömmande mediet

(måste oftast kompletteras med begynnelse- och randvillkor)

Exempel: Värmeledning

Värmeledning innebär ett slags energiströmning

$T = T(\vec{x}, t)$ i varje punkt $\vec{x}$ i en kropp vid olika tidspunkter

Låt $\rho$ beteckna densiteten, och $c$ värmekapaciteten [J / kg °C]

Värmeinnehållet per volymsenhet (motsvarar densiteten $\rho$ i kont. eqv. ovan, (*)):

$$\rho \cdot c \cdot T$$

$\uparrow$ här densiteten av materialet!

Vid värmeledning går energiströmningen $\vec{u}$ i den riktning i vilken temperaturen avtar snabbast.

<u>Fourier's lag</u>: $\vec{u} = -\lambda \operatorname{grad} T$

$\lambda$: Värmeledningsförmågan, $\frac{\text{Watt}}{\text{m} \cdot \text{K}}$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho c T) - \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = p$$

$p = p(\vec{x}, t)$ är <u>Värme-produktionen</u> i punkten $\vec{x}$ vid $t$.

Antar att $\rho, c, \lambda$ är konstanter.

$$\rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial t} - \underbrace{\frac{\lambda}{\rho c}} \Delta T = \frac{p}{\rho c}$$

$a := \frac{\lambda}{\rho c}$ kallas för "temperatur-ledningstalet"

alternativt
$K = \frac{1}{a} = \frac{\rho c}{\lambda}$ det så kallade $K$-värdet som anger isolerings-förmågan

## Exempel: Maxwell's equationer

För $\vec{E}$ kring en punktladdning gäller

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$\vec{E}$ är potentialfält och därför virvelfritt

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

Vi har även att $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, $\operatorname{rot} \vec{B} = 0$.

Detta gäller för alla stationära $\vec{E}, \vec{B}$ i alla delar av rymden där det saknas elektriska laddningar och strömmar.

Där laddningar och strömmar förekommer och tillåts variera med tiden, måste dessa equationer modifieras:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon} \rho \qquad \text{(Gauss' lag)}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{(Faraday's induktionslag)}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu \vec{j} + \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Strömtätheten $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

Vi inser att

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = 0 = \mu \left( \operatorname{div} \vec{j} + \varepsilon \operatorname{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) =$$

$$= \mu \left( \operatorname{div} \vec{j} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E} \right) = \mu \underbrace{\left( \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)}_{\text{Kontinuitetsekv. uppfylld!}} = 0$$

.ppt med Maxwells eqv. i integralform

# ALLMÄNA INTEGRALSATSER

Vi har sett ett antal olika typer av integraler,
t. ex. <u>Linjeintegralen</u> $\int_L \vec{A}\, d\vec{r}$ som kan tolkas som "arbetet" att flytta en partikel längs vägen L i ett kraftfält $\vec{A}$.
eller <u>flödesintegralen</u> $\iint_S \vec{A}\, \hat{N}\, dS$ som ger flödet av "hastighetsfältet" $\vec{A}$ ut genom ytan S

Det finns många andra sådana integral-typer som är av interesse.
För att lätt hantera dessa, formulerar man integralsatserna av Gauß' och Stokes så att de kan användas i allmäna fall.

## GAUSS' Universalsats:

Om ytan S är rand till kroppen V
Så är

$$\oiint_S \underset{\hat{N}dS}{d\vec{S}} \; (\ldots) = \iiint_V dV \; \vec{\nabla}(\ldots)$$

$\hat{N}$ skall vara utåtriktad som brukligt med Gauß!

ersätts med något som gör båda sidorna meningsfulla!

vanliga Gauß' sats erhålls med

$$(\ldots) = \cdot \vec{A},$$

$$\oiint_S \vec{A}\, d\vec{S} = \oiint_S \vec{A}\, \hat{N}\, dS = \iiint_V dV\, \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

(skalär)

men även t. ex.

$$\oiint_S d\vec{S}\, \Phi = \iiint_V dV\, \vec{\nabla}\Phi \qquad (\text{vektor})$$

eller

$$\oiint_S d\vec{S} \times \vec{A} = \iiint_V dV\, \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad (\text{vektor})$$

7 dp.

**STOKES' Universalsats:**

Om den slutna linjen $L$ är rand till den orienterade ytan $S$, så är

$$\oint_L d\vec{r}\, (\ldots) = \iint_S (d\vec{S} \times \vec{\nabla})(\ldots)$$

ersätts med något som gör båda sidorna meningsfulla.

Det gäller även

$$(\hat{N} \times \vec{\nabla}) \cdot \vec{A} = (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \hat{N}$$

vi ersätter $(\ldots)$ med $\cdot\, \vec{A}$ och erhåller

$$\int_L d\vec{r}\,(\cdot\,\vec{A}) = \iint_S (\hat{N}\,dS \times \vec{\nabla})(\cdot\,\vec{A}) =$$

$$= \iint_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\,\hat{N}\,dS =$$

$$= \iint_S \mathrm{rot}\,\vec{A}\;\hat{N}\,dS \qquad (\underline{\text{skalär}}!)$$

(vanliga formen av Stokes' sats.)

Andra exempel är

$$\oint_L d\vec{r}\,(\Phi) = \iint_S (d\vec{S}\times\vec{\nabla})(\Phi) \qquad \text{(vektor)}$$

eller

$$\oint_L d\vec{r}\,(\times\vec{A}) = \iint_S (d\vec{S}\times\vec{\nabla})(\times\vec{A})$$

Sådana integraler förekommer ofta t.ex. i elektrodynamiken!

Visa <u>tabell med integralsatserna</u>!

## PARTIELL INTEGRATION

partiell integration handlar om att flytta derivator!

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = [f(x)\,g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$$

— man får randterm och teckenbyte!

SATS: Låt $\hat N$ vara utåtriktad, så är

PARTIELL INTEGRATION

$$\boxed{\iiint_V \vec\nabla\Phi\cdot\vec\nabla\Psi\,dV = \oiint_S \Phi\,\vec\nabla\Psi\,\hat N\,dS - \iiint_V \Phi\,(\vec\nabla\cdot\vec\nabla\Psi)\,dV}$$

här står något liknande som ovan — flyttar vi derivatan, så får vi randtermen och teckenbyte!

Produktregeln:

$$\vec\nabla(\Phi\vec A) = \vec\nabla\Phi\cdot\vec A + \Phi\,\vec\nabla\cdot\vec A$$

$$\vec\nabla(\Phi\underbrace{\vec\nabla\Psi}_{=\vec A}) = \vec\nabla\Phi\cdot\vec\nabla\Psi + \Phi\cdot\vec\nabla\cdot\vec\nabla\Psi \quad (*)$$

$$\rightarrow \oiint_S \underbrace{\Phi\,\vec\nabla\Psi}_{\vec F}\,\hat N\,dS = \iiint_V \underbrace{\vec\nabla\cdot(\Phi\vec\nabla\Psi)}_{\mathrm{div}\,\vec F}\,dV =$$

$$\overset{(*)}{=} \iiint_V (\vec\nabla\Phi\cdot\vec\nabla\Psi + \Phi\,\vec\nabla\cdot\vec\nabla\Psi)\,dV \qquad \text{vsv.}$$

Ytterligare exempel för partiell integration.

- $\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{A}) = (\nabla\phi)\cdot\vec{A} + \phi\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$

$$\iiint_V \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\phi \, dV = \iiint_V \left(\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{A}) - \phi\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) dV$$

$\downarrow$ Gauß

$$= \oiint \phi\vec{A}\, d\vec{S} - \iiint_V \phi\, \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\, dV$$

(flytta derivaten, få randtermen!)

- $\vec{\nabla}\times(\phi\vec{A}) = (\nabla\phi)\times\vec{A} + \phi\vec{\nabla}\times\vec{A}$

$$\iint_S \phi(\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{S} = \iint_S \left(\vec{\nabla}\times(\phi\vec{A}) - \vec{\nabla}\phi\times\vec{A}\right)\cdot d\vec{S}$$

$\downarrow$ Stokes

$$= \int_L \phi\vec{A}\, d\vec{r} - \iint_S (\vec{\nabla}\phi\times\vec{A})\, d\vec{S}$$

- $\vec{\nabla}(\phi\psi) = (\vec{\nabla}\phi)\psi + \phi\vec{\nabla}\psi$

$$\iiint_V \phi\vec{\nabla}\psi\, dV = \iiint_V \vec{\nabla}(\phi\psi)\, dV - \iiint_V (\vec{\nabla}\phi)\psi\, dV$$

$\downarrow$ allmän integralsats (från Gauß)

$$= \underbrace{\oiint_S \phi\psi\, d\vec{S}}_{\text{randterm}} - \underbrace{\iiint_V (\vec{\nabla}\phi)\psi\, dV}_{\text{flyttad derivata}}$$