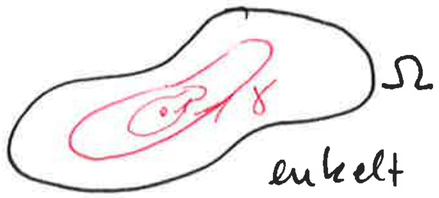
VIRVELFRIA FÄLT — Kommentar till förra veckan's diskussion!

DEFINITION: Ett vektorfält $\vec{A}$ är <u>virvelfritt</u> i ett område Ω om

$$\text{rot } \vec{A} = 0.$$

Ω är <u>enkelt sammanhängande</u> om varje sluten kurva L i Ω kan kontinuerligt deformeras till en punkt i området utan att den lämnar området.

Exempel i 2D – områden som saknar hål



Kan inte dras ihop – hålet kan inte undvikas!

i 3D: $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ <u>är</u> enkelt sammanhängande!

– man kan alltid undvika origo!

men, t.ex., $\mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-axeln}\}$ är <u>inte</u> det!

SATS: $\boxed{\text{Varje potentialfält är virvelfritt.}}$

"$\Rightarrow$" potentialfält $\Rightarrow$ $\vec{u} = \text{grad}\, u$

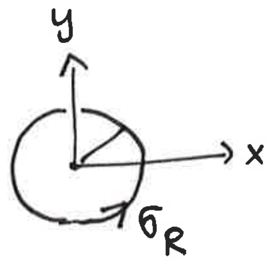
$$\text{rot}\, \vec{u} = \text{rot grad}\, u = 0 \quad \square.$$

"$\Leftarrow$" inte alltid!

t. ex. $\vec{B} = \dfrac{(-y, x, 0)}{x^2+y^2}$ $\quad (x,y) \neq (0,0)$

är virvelfritt men inget potentialfält!

$$\int_{\sigma_R} \vec{B}\, d\vec{r} = 2\pi \neq 0$$



Men, vi kan "rädda" "$\Leftarrow$" genom ett tillägg:

SATS: Om vektorfältet $\vec{u}$ är virvelfritt i ett öppet enkelt sammanhängande område Ω i $\mathbb{R}^3$ så har $\vec{u}$ en potential i Ω.

För att visa att $\vec{u}$ har potential i Ω vill vi visa att kurvintegralen är oberoende av vägen i Ω, i.e., att

$$\oint_\gamma \vec{u} \cdot d\vec{r} = 0$$ för varje enkel sluten kurva γ i området Ω.

Vi visa detta i det fall då γ är rand till en yta Y i Ω.

Stokes:
$$\oint_\gamma \vec{u}\, d\vec{r} = \pm \iint_Y \underbrace{(\operatorname{rot} \vec{u})}_{=0} \cdot \hat{N}\, dS$$

$\square$.

KÄLLFRIA FÄLT

DEFINITION: Ett vektorfält $\vec{B}$ sägs vara källfritt eller solenoidalt i ett område om

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Om det för ett givet vektorfält $\vec{B}$ existerar ett vektorfält $\vec{A}$ sådant att

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

sägs $\vec{B}$ ha <u>vektorpotentialen</u> $\vec{A}$.

SATS: För ett kontinuerligt deriverbart vektorfält $\vec{B}$ gäller:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \iff \vec{B} \text{ har vektorpot. } \vec{A}$$

KROKLINJIGA KOORDINATSYSTEM

Oftast mycket viktigt att välja rätt koordinatsystem för att kunna lösa ett givet problem.

- byte av koordinater
- byte av basvektorer!

Sambandet mellan nytt koordinatsystem (u_1, u_2, u_3) och det vanliga kartesiska, (x, y, z)

$$u_1 = f_1(x, y, z) \qquad x = g_1(u_1, u_2, u_3)$$
$$u_2 = f_2(x, y, z) \quad \text{eller} \quad y = g_2(u_1, u_2, u_3)$$
$$u_3 = f_3(x, y, z) \qquad z = g_3(u_1, u_2, u_3)$$

Är f_i eller g_i inte linjär, har vi ett "kroklinjigt" koordinatsystem.

koordinatlinjer

t.ex. erhåller man u_3-koordinatlinjen om man håller u_1, u_2 fix men varierar u_3

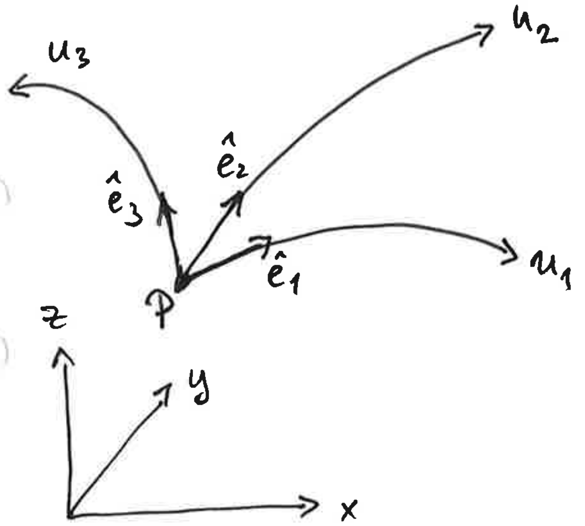
Koordinatplan

t.ex. erhåller man u_1-koordinatplanet om man håller u_1 fix men varierar de andra två.

Se .ppt för exempel!

Definition:

Ett krokligt koordinatsystem är ortogonalt om koordinatlinjerna i varje punkt skär varandra i rät vinkel.



$$\vec{r} = (x, y, z) =$$
$$= (f_1(u_1, u_2, u_3), f_2(u_1, u_2, u_3), f_3(u_1, u_2, u_3)).$$

Tangentvektor till u_i - koordinatlinjen i punkten P är $\vec{r}_i' = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}(P)$. betyder att $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_j} = 0$, $i \neq j$

Tangentvektorerna i P bildar en bas.
Om vi normerar tangentvektorna får vi ortonormerade basvektorer $\hat{e}_i = \frac{\vec{r}_i'}{|\vec{r}_i'|}$

Till ett ortogonalt krokligt koordinatsystem väljer vi ortonormerade basvektorer $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ i varje punkt som

$$\hat{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}$$

där h_i kallas skalfaktorer och definieras av $h_i = |\vec{r}_{u_i}'|$.

Basvektorerna är i allmänhet inte konstanta!
(dvs. akta integration – kan inte tas utanför integralen, etc.!)

Cylinderkoordinater

Sambandet mellan kartesiska och cylinderkoord. ges av

$$\vec{r} = (x, y, z) = (\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, z)$$

Tangentvektorer till ϱ – koordinatlinjen:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varrho} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$$

har längd 1, så vi får

$$\hat{e}_\varphi = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \quad , \quad h_\varrho = 1.$$

till φ- koordinatlinjen,

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = (-\varrho\sin\varphi, \varrho\cos\varphi, 0)$$

$$\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right| = \varrho$$

$\rightarrow$ basvektor och skalfaktor är

$$\hat{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$$

$$h_\varphi = \varrho$$

och likadant för z,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = (0, 0, 1)$$

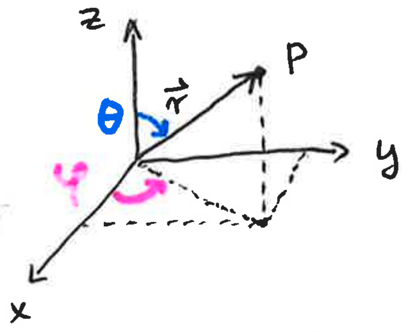
$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right| = 1$$

$$\hat{e}_z = (0, 0, 1), \quad h_z = 1$$

$\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_z$ är ortogonala.

Sfäriska koordinater

$$\vec{r} = (x, y, z) = (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r\cos\theta)$$



$$\vec{r}_r{}' = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$$

$$h_r = 1$$

$$\vec{r}_\theta{}' = (r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta \sin\varphi, -r\sin\theta)$$

$$h_\theta = r$$

$$\vec{r}_\varphi{}' = (-r\sin\theta \sin\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, 0)$$

$$h_\varphi = r\sin\theta$$

$\rightarrow$ Basvektorer blir

$$\hat{e}_r = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$$
$$\hat{e}_\theta = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta \sin\varphi, -\sin\theta)$$
$$\hat{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$$

Ortsvektordifferentialen

$$\vec{r} = \vec{r}\,(u_1, u_2, u_3)$$

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}\, du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}\, du_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}\, du_3$$

Enligt definition av skalfaktorer och basvektorer är

$$\hat{e}_i = \frac{1}{h_i}\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \;\rightarrow\; \frac{d\vec{r}}{\partial u_i} = h_i\,\hat{e}_i$$

$$\rightarrow\; d\vec{r} = h_1\,\hat{e}_1\, du_1 + h_2\,\hat{e}_2\, du_2 + h_3\,\hat{e}_3\, du_3$$

Kommuterar igen – i allmänhet $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ inte konstanta, man ska akta sig dra dem föran i integralen

Integration i krokliniga koordinatsystem

t. ex. beräkna flödesintegraler över en yta som beskrivs av att en av de nya koordinaterna är konstant, t. ex. $u_1 = 2$. Då får vi att ytan kan parametriseras med u_2 och u_3

eller exempel av större

$$\hat{n}\, dS = \pm \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}\, du_2\, du_3 =$$

$$= \pm\,(h_2\,\hat{e}_2) \times (h_3\,\hat{e}_3)\, du_2\, du_3 =$$

$$= \pm\, h_2\, h_3\, \hat{e}_1\, du_2\, du_3$$

fler exempel i övningarna!

Transformation av operatorer

Vi vill t.ex. beräkna gradienten av ett skalärfält ϕ givet i ett kroklinjigt koordinatsystem (u_1, u_2, u_3).

Gradienten blir en vektor; den måste alltså ser ut som

$$\vec{\nabla}\phi = G_1 \hat{e}_1 + G_2 \hat{e}_2 + G_3 \hat{e}_3$$

$$d\phi = \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r}$$

eftersom $\quad d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz$.

Innan kom vi fram till att

$$d\vec{r} = h_1 \hat{e}_1 du_1 + h_2 \hat{e}_2 du_2 + h_3 \hat{e}_3 du_3$$

$$\rightarrow d\phi = \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r} = G_1 h_1 du_1 + G_2 h_2 du_2 + G_3 h_3 du_3$$

$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 = 1$

Vi vet att

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \phi}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \phi}{\partial u_3} du_3$$

jämför vi så blir

$$G_i h_i = \frac{\partial \phi}{\partial u_i}$$

$$\rightarrow \boxed{G_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial u_i}}$$

alltså
$$\boxed{\vec{\nabla}\phi = \sum_i \frac{1}{h_i}\frac{\partial \phi}{\partial u_i}\hat{e}_i}$$
Gradient

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}(A_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial u_3}(A_3 h_1 h_2)\right)}$$
Divergens

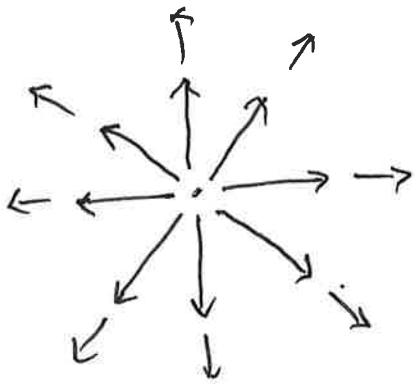
och
$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{e}_1 & h_2\hat{e}_2 & h_3\hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}}$$
Rotation

Bevis – se Ramgård (Kopior!)

VIKTIGA VEKTORFÄLT OCH DIRAC'S δ.

Låt oss titta på divergensen av

$$\vec{v} = \frac{\hat{r}}{r^2}$$



Man kommer fram till att

$$\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} \frac{\hat{r}}{r^2} = \dots = \underline{\underline{0}}\ !$$

(Vi hade detta innan för $\vec{E}$)

Sfär. koord., $r^2 \frac{1}{r^2}$, räkna hemma!

Vad betyder detta?! Är paradox!

Problemet blir värre, om vi tittar igen på Gauß' sats.

<u>Vänsterledet</u> av divergenssatsen:

$$\oint_{\partial K} \vec{v} \cdot \hat{N}\, dS = \int \frac{1}{R^2} \hat{r} \cdot \underbrace{\hat{r} \left(R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \right)}_{\text{se formel för } \hat{N}\, dS,\ \text{p. } 95.\ \text{Här, } r=R.}$$

K är klot med radie R kring origo

$$= \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \underline{\underline{4\pi}}\,.$$

<u>Högerledet</u>

$$\int_K \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \; dx\,dy\,dz = 0$$

om vi håller fast vid att $\operatorname{div} \vec{v} = 0$!

But- we should not divide by 0!

Om vi håller fast vid Gauß' sats,

så måste nog bidraget kommer från

punkten $r = 0$

(analogt punktpartikel, t. ex. e^-).

Problemet är av stor betydelse

för hela E-dynamiken!

(Coulomb $\frac{1}{r}$, Dipolfält etc. ....)

För att undvika divergensen i $r = 0$,

låt oss se på

$$\frac{\hat{e}_r}{r^2} \longrightarrow \frac{r\,\hat{e}_r}{r^3 + \varepsilon^3} \qquad \varepsilon > 0$$

I sfäriska koordinater, $\nabla_r \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \vec{A})$

$$\rightarrow \quad \operatorname{div} \frac{r\,\hat{e}_r}{r^3 + \varepsilon^3} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^3}{r^3 + \varepsilon^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{(r^3 + \varepsilon^3)3r^2 - r^3 \cdot 3r^2}{(r^3 + \varepsilon^3)^2}$$

$$= \frac{3r^3 + 3\varepsilon^3 - 3r^3}{(r^3 + \varepsilon^3)^2} = \underbrace{\frac{3\varepsilon^2}{(r^3 + \varepsilon^3)^2}}_{= f(r)}$$

$$\int d^3r\, f(r) = \,?$$

$$\int d^3r \frac{3\varepsilon^2}{(r^3 + \varepsilon^3)^2} = 4\pi \int_0^\infty dr\, r^2 \frac{3\varepsilon^2}{(r^3 + \varepsilon^3)^2}$$

$$t = \frac{r^3}{\varepsilon^3} \qquad \frac{dt}{dr} = \frac{3r^2}{\varepsilon^3}$$

$$\rightarrow \quad 4\pi \int_0^\infty dt \, \frac{\varepsilon^3}{\cancel{3}\cancel{r^2}} \, \cancel{r^2} \, \frac{\cancel{3}\varepsilon^2}{(r^3+\varepsilon^3)^2} =$$

$$= 4\pi \int_0^\infty dt \, \frac{1}{(t+1)^2} = \underline{\underline{4\pi}} \qquad \frac{\varepsilon^2}{(t\varepsilon^3+\varepsilon^3)^2}$$

Vi inser att $\lim_{\varepsilon \to 0} f(r) = 4\pi$,

i.e., att $\underbrace{\int \operatorname{div}\left(\frac{r\,\hat{e}_r}{r^3+\varepsilon^3}\right) d^3r}_{\text{H.L. Gauß,}} = 4\pi$

och allt är "ok" om vi behandlar singulariteten vid $r = 0$ korrekt!

Vi ser – Integralen över volym som innehåller origo är 4π.

Vi vill skriver därför för divergensen

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{e}_r}{r^2}\right) = 4\pi \underbrace{\delta^3(\vec{r})}$$

en "ny" mätare som ger bidrag bara när $\vec{r} = 0$!

Kallas för "Dirac's δ-funktion" och har speciella egenskaper.

Dirac's δ- Funktion

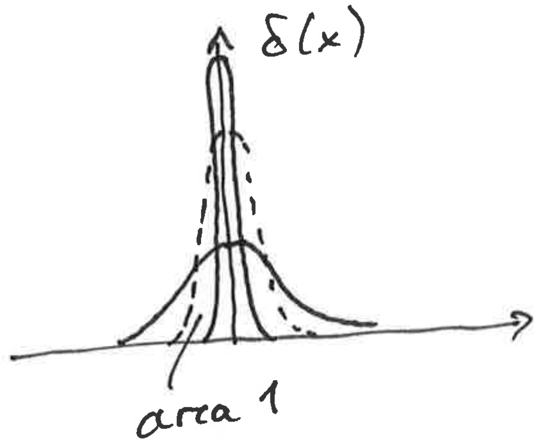
I 1 dimension:

$$\delta(x) := \begin{cases} 0 & \text{om} \quad x \neq 0 \\ \infty & \text{om} \quad x = 0 \end{cases}$$

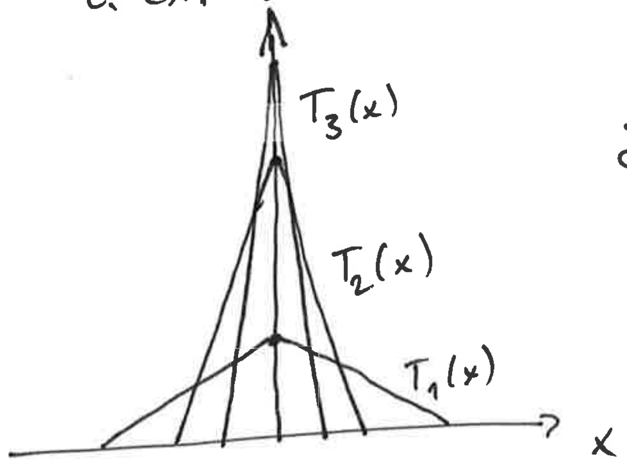
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1.$$

Rent tekniskt är $\delta(x)$ ingen funktion, men en distribution.

Lättare att förstå detta om man tänker sig en Gauß-fkt. som blir smalare och smalare, men integralen normerad till 1:



Eller t. ex. distributionen $T_i(x)$



$\delta = T_\infty(x)$ med normerad integral.

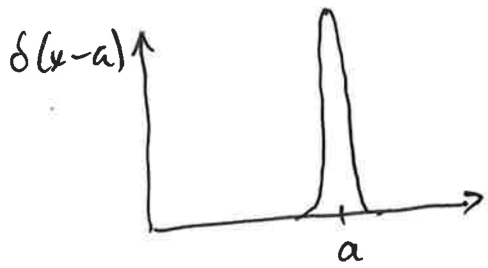
Låt $f(x)$ vara en funktion (som inte har några konstigheter, d.v.s. är kontinuerlig)

Så är produkten $f(x) \cdot \delta(x)$ noll överallt utanför $x = 0$.

Det gäller att

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta(x)\, dx = f(0).$$

Man kann även flytta singulariteten till en punkt $x = a$.



$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{om } x \neq a \\ \infty & \text{om } x = a. \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(x-a) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\, \delta(x-a) = f(a)$$

δ- "funktionen" är egentligen ingen funktion och inte väldefinierad. Men under integralen är detta inget problem.

Det bästa är att förställa sig delta-funktionen alltid i samband med integraler!

i 3 dimensioner är det samma sak:

$$\delta^3(\vec{r}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$$

$$\boxed{\int f(\vec{r})\,\delta(\vec{r}-\vec{a})\,d\vec{r} = f(\vec{a}).}$$

Bra att veta:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$\vec{\nabla}^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\,\delta^3(\vec{r})$$

(exponent 3 bara antyder att det är 3 dimensioner)

– mycket viktigt senare i Elektrodynamiken!

Punktkälla och -sänka

$\frac{q}{r^2}\hat{e}_r$ konstanten q är punktkällans källstyrka.

$q > 0$ källa
$q < 0$ sänka

Exempel: $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{e}_r}{r^2}$

$$\oiint_S \frac{q}{r^2}\hat{e}_r\,dS = \begin{cases} 0 & \text{om origo } \underline{\text{yttre}} \text{ punkt till } V \\ 4\pi q & \text{om origo } \underline{\text{inre}} \text{ punkt – " –} \end{cases}$$

potentialen

$u(\vec{r}) = \frac{q}{r}$ eftersom $-\text{grad}\, u = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{q}{r}\hat{r} = \frac{q\hat{e}_r}{r^2}.$