

1. Teori frågor:

a) Entalpi, $H = U + PV$

är den energi som krävs för att skapa ett system med inre energi U och volym V i en omgivning med konstant tryck P . \square

b) Entropiökning för kvastatisk process $dS = \frac{dQ}{T}$ ger $\Delta S = \frac{Q}{T_0}$ om T_0 är konstant. \square

c) En irreversibel process ökar den totala entropin, $\Delta S_{\text{total}} > 0$. \square
 (Gäller för ett helt (isolerat) system)

d) Värme kapacitet vid konstant tryck:

$$C_P = \left(\frac{Q}{\Delta T} \right)_P \stackrel{(\Delta U = Q + W)}{=} \left(\frac{\Delta U - W}{\Delta T} \right)_P \stackrel{(W = -P\Delta V)}{=} \left(\frac{\Delta U}{\Delta T} \right)_P + P \left(\frac{\Delta V}{\Delta T} \right)_P \quad \square$$

är den värme som krävs för att höja temperaturen med ΔT .

Värme kapaciteten vid konstant tryck är större än den vid konstant volym eftersom den del av värmen används till att expandera systemet och göra ett arbete på omgivningen.

Entropi för ideal gas

$$S = k \ln[F(N)] + Nk \ln(V) + \frac{3Nk}{2} \ln(U)$$

a) k : Boltzmanns konstant enhet J/K

F : Funktion av antal partiklar N , innehåller bland annat $1/N!$ för identiska partiklar

N : Antal atomer

V : Volymen för gasen

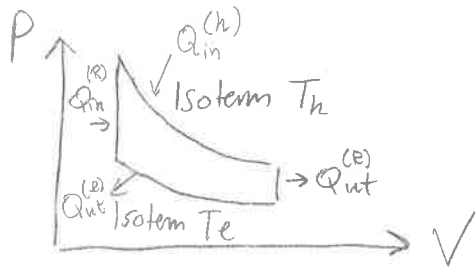
U : Inre energin för gasen

b) Relation mellan entropi och temperatur:

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_{V,N}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_{V,N} = \frac{3Nk}{2} \frac{\partial}{\partial U} \ln U = \frac{3Nk}{2} \frac{1}{U} = \frac{1}{T} \Leftrightarrow U = \frac{3}{2} NkT \quad \square$$

3) a) Stirling motorns kretsprocess:



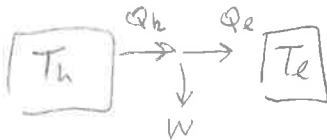
Expansion och kompression sker isotermt med hög temperatur T_h och låg temp T_e . Värme kan då sugas och uppåtas från varm respektive kall reservoar så att totala entropiändringen blir liten (eller teoretiskt kan den vara null)

Värme tas ur systemet genom en regenerator och sedan tillbaks av regeneratoren genom att gasen pressas genom denna.

b) Använd termodynamikkens första huvudsats: Energi kan ej förstöras eller skapas.
För en process gäller $\Delta U = Q + W$.

Carnot verkningsgraden:

$$\eta = \frac{\text{Nyttig arbete}}{\text{Drivkraften}} = \frac{W}{Q_h} = \frac{Q_h - Q_e}{Q_h} = 1 - \frac{Q_e}{Q_h} \quad (*)$$



$$Q_h = W + Q_e$$

$$W = Q_h - Q_e$$

Entropiändring: reservoarnas: (kvaristatiska processer)

$$\Delta S = \frac{Q_e}{T_e} - \frac{Q_h}{T_h} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{Q_e}{T_e} \geq \frac{Q_h}{T_h} \Leftrightarrow \frac{T_h}{T_e} \geq \frac{Q_h}{Q_e}$$

$$\Leftrightarrow \frac{T_e}{T_h} \leq \frac{Q_e}{Q_h}$$

(*)
↗
ersätt med
tal som är mindre
med mindre
ger större tal

$$\boxed{\eta \leq 1 - \frac{T_e}{T_h}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_e}{T_h}}$$

maximala verkningsgraden för värme-motorer:

4) Vatten $T = 100^\circ\text{C} = 373\text{ K}$ $m = 1\text{ kg}$

Reservoir $T_R = 0^\circ\text{C} = 273\text{ K}$

a) $Q = C \Delta T = c m \Delta T = 4,18 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 100 = 4,18 \cdot 10^5$
 $= 418\text{ kJ}$

↑
Värme ut ur vatten
till reservoaren

↑
Specifikt värme
kapacitet $[4,18\text{ kJ}/(\text{kg K})]$

b) $dS = \frac{dQ}{T} = \frac{cm dT}{T} \Rightarrow \Delta S = cm \int_T^{T_R} \frac{dT}{T} =$
 $= cm (\ln(T_R) - \ln(T)) =$
 $= cm \ln(T_R/T) =$
 $= 4,18 \cdot 10^3 \cdot 1 \ln\left(\frac{273}{373}\right) =$
 $= -1304,6\text{ J/K} = -1,30\text{ kJ/K}$

c) Entropi ökning för reservoaren.

$$\Delta S_R = \frac{Q_R}{T_R} = \frac{418}{273}\text{ kJ/K} = +1,53\text{ kJ/K}$$

Total entropi förändring.

$$\Delta S_{\text{total}} = \Delta S + \Delta S_R = 1,53 - 1,30 = 0,23\text{ kJ/K} > 0 \quad (\text{irreversibel process})$$

5) Gas av molekyler - N , T
 Vibrationsenergi $E_n = A(n + 1/2)$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

a) Sannolikheten för vibrations tillstånd n .

$$P_n = \frac{e^{-E_n/kT}}{Z} = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z}$$

Tillståndssumma:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta A(n+1/2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta A})^n e^{-\beta A/2}$$

Geometrisk summa.

$$= \frac{1}{1 - e^{-\beta A}} \cdot e^{-\beta A/2}$$

$$\Rightarrow P_n = e^{-\beta A(n+1/2)} \cdot \frac{(1 - e^{-\beta A})}{e^{-\beta A/2}} = e^{-\beta A n} (1 - e^{-\beta A})$$

Exponentiell dämpad med n . □

b) Medelvärde av energi (för en molekyls vibrationsenergi):

$$\bar{E} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = -e^{\beta A/2} (1 - e^{-\beta A}) \left(-A/2 e^{-\beta A/2} \frac{1}{(1 - e^{-\beta A})} \right)$$

Polariseringslinje
 (-1)(-A)(-e^{-\beta A}) \frac{1}{(1 - e^{-\beta A})^2}

$$= A \left(\frac{1}{2} + \frac{e^{-\beta A}}{(1 - e^{-\beta A})} \right) = A \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{(e^{\beta A} - 1)} \right)$$

Konstant $A/2$ term (beroer på p, T kan definieras bort genom att flytta till energi) □

Bose-Einstein faktorn på grund av ekvidistanta kvantiserade energier med energiskillnad A . □

$U_{\text{vib}} = N \bar{E}$

Inre energi för hela systemets totala vibrationsenergi.

Alternativt:

$$\bar{E} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n P_n = \sum_{n=0}^{\infty} A(n+1/2) \cdot e^{-\beta A n} (1 - e^{-\beta A}) = \underline{\text{Svårt!}}$$

(men går att göra)

6) Dödmotor: $T_{\text{omg}} = 20^\circ\text{C} = 293\text{ K}$

Kompression: $\kappa = \frac{V_1}{V_2} = 16$

$T_{\text{max}} = 1900^\circ\text{C} = 2173\text{ K}$

a) $T_{\text{max}} = T_3$ eftersom värme förs in i motorn Q_{in} och trycket är konstant $P_0 V = NkT \Leftrightarrow T = \frac{P_0 V}{Nk}$
 $\Rightarrow T \propto V$ temperaturen ökar från 2 \rightarrow

$T_{\text{omg}} = T_{\text{min}} = T_1$ eftersom värme släpps ut till omgivningen Q_{ut} och volymen är konstant $P V_0 = NkT \Leftrightarrow T = \frac{P V_0}{Nk}$
 $\Rightarrow T \propto P$ temperaturen minskar från 4 \rightarrow 1.

b) Temperatur T_2 beräknas genom antagandet att kompressoren är adiabatisk ("snabb").

T_2 (enkel) $\rightarrow V_2 T_2^{\gamma/2} = V_1 T_1^{\gamma/2} \Leftrightarrow T_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{2/\gamma} T_1 = 16^{2/5} \cdot 293 = 888\text{ K}$

T_4 (svår) för vilket ej volym är givet 3 \rightarrow 4 $\rightarrow V_3 T_3^{\gamma/2} = V_4 T_4^{\gamma/2} \Leftrightarrow T_4 = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{2/\gamma} T_3$ (*)

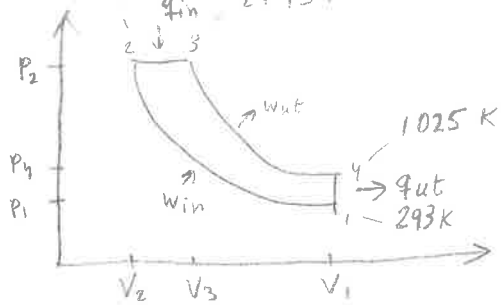
Vi behöver $\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_3}{V_1} = \frac{V_2}{V_1} \left(\frac{V_3}{V_2}\right)$ Detta är $\frac{1}{\kappa}$
 Använd idealgas lag $PV = NkT$ för 2 \rightarrow 3 vid konstant tryck P_2

$P_2 = \frac{NkT_2}{V_2} = \frac{NkT_3}{V_3} \Leftrightarrow \frac{T_2}{T_3} = \frac{V_2}{V_3}$ (**)

Använd Kompressionsförhållning och Ideal gas expansion (**)

Trick: Förkläng med $\frac{1}{\kappa} = \frac{V_2}{V_1}$
 $\Rightarrow T_4 = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{2/\gamma} T_3 = \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{2/\gamma} T_3 = \left(\frac{V_3}{V_2} \cdot \frac{V_2}{V_1}\right)^{2/\gamma} T_3 = \left(\frac{T_3}{T_2} \cdot \frac{1}{\kappa}\right)^{2/\gamma} T_3$
 $= \left(\frac{2173}{888} \cdot \frac{1}{16}\right)^{2/5} 2173 = 1025\text{ K}$

6m)



c) Verkningsgraden för processen:

Carnot verkningsgrad per $\eta \leq 1 - \frac{T_c}{T_h} = 1 - \frac{T_1}{T_3} = 1 - \frac{293}{1025} \approx 87$

Verklig verkningsgrad är

$$\eta = \frac{\text{Nyttigt arbete}}{\text{Värme vi betalar (från varm reservoar) (värme från diesel)}} = \frac{W}{Q_{in}} = \frac{W_{ut} - W_{in}}{Q_{in}}$$

(Obs: W_{ut} är inte bara den adiabatiska expansionen utan även delen med expansion vid konstant tryck för diesel motorer)

Hur stor är Q_{in} ?

Temperaturen stiger från $T_2 \rightarrow T_3$ vid tillförsel av värme Q_{in} med konstant tryck, p

Värmekapacitet för konstant tryck: $(\Delta U = Q + W)$

$$C_p = \left(\frac{Q}{\Delta T} \right)_{p=p_2} = \left(\frac{\Delta U - W}{\Delta T} \right)_p = \left(\frac{\frac{5}{2} Nk\Delta T - (-P\Delta V)}{\Delta T} \right)_p = \dots$$

$$= \left(\frac{\frac{5}{2} Nk\Delta T + Nk\Delta T}{\Delta T} \right)_p = \frac{5+2}{2} Nk$$

$$\Rightarrow Q_{in} = C_p (T_3 - T_2) = \frac{5+2}{2} Nk (T_3 - T_2)$$

(611)

Hur stort är arbetet som utförs per cykel: $W = W_{ut} - W_{in}$

I stället för att beräkna tryckvolym integralkerna så kan vi beräkna Q_{ut} och sedan uttingtra termodynamikens första huvudsats:

$$Q_{in} - Q_{ut} = W$$

Hur stort är Q_{ut} ?

I processen $4 \rightarrow 1$ svalnar gasen vid konstant volym $T_4 \rightarrow T_1$

Värme kapacitet vid konstant volym är

$$C_V = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{\frac{f}{2} Nk \Delta T}{\Delta T} = \frac{f}{2} Nk$$

$$\Rightarrow Q_{ut} = C_V (T_4 - T_1) = \frac{f}{2} Nk (T_4 - T_1)$$

Arbetet:

$$\Rightarrow W = Q_{in} - Q_{ut} = \frac{f+2}{2} Nk (T_3 - T_2) - \frac{f}{2} Nk (T_4 - T_1)$$

Verkningsgraden: (Nk försvinner)

$$\Rightarrow \eta = \frac{W}{Q_{in}} = \frac{\frac{f+2}{2} Nk (T_3 - T_2) - \frac{f}{2} Nk (T_4 - T_1)}{\frac{f+2}{2} Nk (T_3 - T_2)}$$

$$= \frac{7(2173 - 888) - 5(1025 - 293)}{7(2173 - 888)} \approx 59\% < 87\%$$