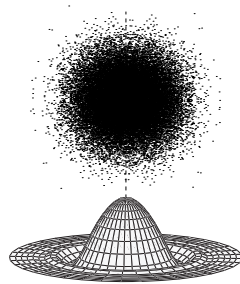


Några utvalda lösningar till

Kvantvärldens fenomen
-teori och begrepp



Del 1: Partiklar och vågor

Magnus Ögren

Här följer ett urval av lösningar till några problem från del 1 av boken *Kvantvärldens fenomen - teori och begrepp*, Gunnar Ohlén, denna kan rekvireras från Studentlitteratur (ISBN 91-44-03450-4). I detta dokument www.studentlitteratur.se/files/sites/kvantvarlden/losningsforlagdel1.pdf refererar vi konsekvent till Gunnars bok som *läroboken*. Uppgifterna är numrerade enligt **kapitel.uppgift**. Jag tar tacksamt emot kommentarer och påpekanden gällande innehållet (\rightarrow magnus@ogren.se). För ett utsökt arbete med figurerna tackar jag Johnny Kvistholm. Ett stort tack för värdefulla kommentarer går till Magnus Borgh, Sara Bargi, Ragnar Bengtsson och Gunnar Ohlén vid avdelningen för Matematisk fysik, samt Carina Fasth vid FTF, alla i Lund.

Lund i augusti 2006

Magnus Ögren

Version:2007

1.3 Solljusets intensitet vid jordytan är ungefär 1 kW/m^2 . Antag för enkelhets skull att solljuset är monokromatiskt med våglängden 600 nm .

a) Hur många fotoner infaller per sekund mot en yta som har storleken 1 m^2 ?

b) Beräkna ljustrycket mot en spegel riktad mot solen.

c) [Disk.] Kan man använda ljustrycket för att låta rymdfarkoster "segla" i rymden?

Lösning 1.3 a): Vi beräknar först energin för en foton

$$E_{foton} = hc/\lambda = 2\pi\hbar c/\lambda = 2\pi \cdot 1.05 \cdot 10^{-34} \cdot 3.00 \cdot 10^8 / 600 \cdot 10^{-9} = 3.30 \cdot 10^{-19} \text{ J.}$$

Totala energin som träffar 1 m^2 under 1 s är ($1 \text{ kW} = 10^3 \text{ J/s}$)

$$E_{total} = 10^3 \cdot 1 \cdot 1 = 10^3 \text{ J.}$$

Antalet fotoner är således

$$N = E_{total}/E_{foton} = 10^3/3.30 \cdot 10^{-19} = 3.0 \cdot 10^{21}.$$

Lösning 1.3 b): Låt oss för enkelhets skull räkna på en 1 m^2 stor perfekt reflekterande spegel vänd vinkelrätt mot det infallande ljuset. Tryck definieras som kraft per ytenhet, och (reaktions-) kraft är rörelsemängdsförändring per sekund. Rörelsemängden för en infallande foton är

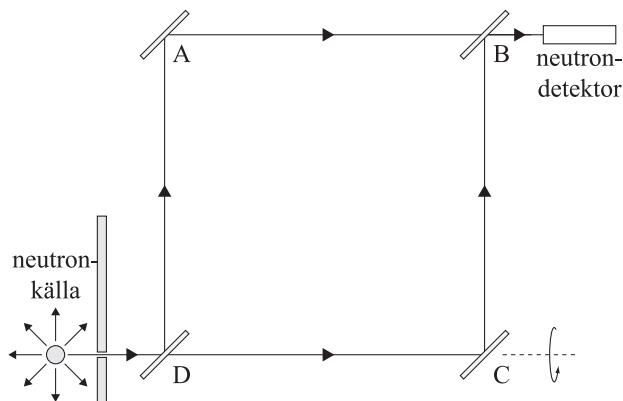
$$p = h/\lambda = 2\pi \cdot \hbar/\lambda = 2\pi \cdot 1.05 \cdot 10^{-34} / 600 \cdot 10^{-9} = 1.10 \cdot 10^{-27} \text{ Ns.}$$

Eftersom en spegel reflekterar fotonerna blir rörelsemängdsändringen dubbelt så stor som den infallande rörelsemängden, därför får vi en faktor 2. Antalet fotoner för 1 m^2 per sekund beräknade vi i a), så totala trycket blir nu

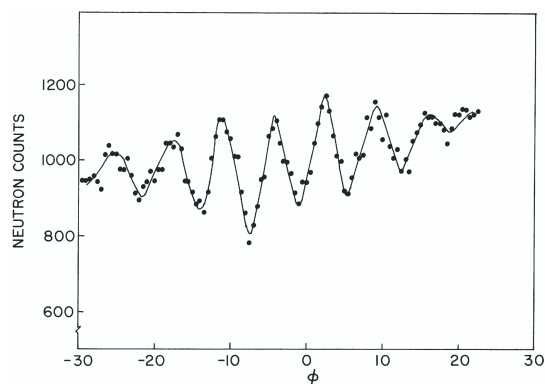
$$P = \Delta p \cdot N = 2 \cdot p \cdot N = 2 \cdot 1.10 \cdot 10^{-27} \cdot 3.0 \cdot 10^{21} = 6.6 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}^2 (= \text{Pa}).$$

Lösning 1.3 c): Se t.ex. www.solarsails.info.

1.7 [*] I detta exempel ska vi behandla det interferensförsök som finns beskrivet i bilden nedan.



ABCD bildar en kvadrat med sidan 32 mm. Anordningen kan vridas kring en horisontell axel som sammanfaller med sträckan DC. Låt ϕ vara sträckan DA:s vinkel mot horisontalplanet. Figuren nedan visar räknehastigheten i detektorn som funktion av ϕ .



Bestäm neutronernas våglängd och energi.

Lösning 1.7: Det är skillnaden i potentiell energi orsakad av gravitationen mellan sträckorna AB och DC som ger upphov till interferens mönstret. När skillnaden motsvarar ett helt antal våglängder får vi (konstruktiv) interferens. De respektive våglängderna är (icke-relativistisk beräkning)

$$\lambda_{DC} = h/\sqrt{2mE_{kin}},$$

$$\lambda_{AB} = h/\sqrt{2m(E_{kin} - mga \sin \phi)}.$$

Notera att den kinetiska energin för sträckan AB är lika med den kinetiska energin för sträckan DC (som vi betecknar E_{kin}) minus den potentiella energi

som skiljer mellan position A och D. Skillnaden i antalet våglängder är ($a = 32 \text{ mm}$ är kvadraten ABCD:s sida)

$$\begin{aligned}\Delta n &= a/\lambda_{DC} - a/\lambda_{AB} = \frac{a}{h} \left(\sqrt{2mE_{kin}} - \sqrt{2m(E_{kin} - mga \sin \phi)} \right) = \\ &= \frac{a\sqrt{2mE_{kin}}}{h} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{mga \sin \phi}{E_{kin}}} \right).\end{aligned}$$

Genom att nu använda första termen i en serieutveckling av roten ($\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2$) får vi

$$\Delta n \approx \frac{a\sqrt{2mE_{kin}}}{h} \frac{mga \sin \phi}{2E_{kin}} = \frac{a^2 m^{3/2} g \sin \phi}{h \sqrt{2E_{kin}}}. \quad (1)$$

Ur figuren (nederst på sidan 30 i läroboken) utläser vi att skillnaden mellan 6 interferens toppar är ca 42° och vi kan då lösa ut E_{kin} ur sambandet (1) ovan med $\Delta n = 6$ och $\sin 42^\circ \approx 0.669$ får vi

$$E_{kin} = \left(\frac{a^2 m^{3/2} g \cdot 0.669}{h \cdot 6\sqrt{2}} \right)^2 \approx 6.7 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 0.042 \text{ eV},$$

där vi använt $a = 32 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $h = 2\pi\hbar = 6.60 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$, $m = m_n = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, $g = 9,82 \text{ N/kg}$. Vi kan nu beräkna våglängden ur följande samband

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m} \frac{h^2}{\lambda^2} \Rightarrow \lambda \approx 1.4 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0.14 \text{ nm}.$$

1.8 Vid en viss tidpunkt ges en partikels vågfunktion av

$$\psi(x, 0) = \begin{cases} Nx \exp(-x/a), & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

a) Bestäm konstanten N så att vågfunktionen blir normerad.

b) Vad är sannolikheten att vid denna tidpunkt finna partikeln i följande intervall $x < 0$, $0 < x < a$ och $x > a$?

Lösning 1.8 a): Att vågfunktionen är normerad innebär att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, 0)|^2 dx = 1.$$

Således får vi

$$|N|^2 \underbrace{\int_0^\infty x^2 e^{-2x/a} dx}_{a^3/4} = 1 \Rightarrow |N| = \sqrt{\frac{4}{a^3}}.$$

Lösning 1.8 b): I intervallet $x < 0$ är vågfunktionen identiskt 0 så här är sannolikheten att hitta partikeln 0. För intervallet $0 < x < a$ använder vi den 'vanliga' sannolikhetstolkningen

$$P(0 < x < a) = \int_0^a |\psi(x, 0)|^2 dx = \frac{4}{a^3} \int_0^a x^2 e^{-2x/a} dx.$$

Integralen ovan kan t.ex. beräknas m.h.a. (upprepad) partialintegration

$$\begin{aligned} \int_0^a x^2 e^{-2x/a} dx &= \left[x^2 \frac{e^{-2x/a}}{-2/a} \right]_0^a + a \int_0^a x e^{-2x/a} dx = -\frac{a^3}{2} e^{-2} + a \left[x \frac{e^{-2x/a}}{-2/a} \right]_0^a + \\ &+ \frac{a^2}{2} \int_0^a e^{-2x/a} dx = -\frac{a^3}{2} e^{-2} - \frac{a^3}{2} e^{-2} - \frac{a^3}{4} (e^{-2} - 1) = \frac{a^3}{4} (1 - 5e^{-2}). \end{aligned}$$

Alltså får vi

$$P(0 < x < a) = \frac{4}{a^3} \frac{a^3}{4} (1 - 5e^{-2}) = 1 - 5e^{-2}.$$

I det sista intervallet skulle vi kunna göra på samma sätt. Men vi kan också utnyttja att den totala sannolikheten är 1, så att sannolikheten för det sista intervallet är

$$P(a < x) = 1 - P(0 < x < a) = 1 - (1 - 5e^{-2}) = 5e^{-2}.$$

3.1 En jämn ström av elektroner har den kinetiska energin 0.1 eV (per elektron). I medeltal passerar 500 partiklar per sekund en punkt på x -axeln. Ange den vågfunktion som beskriver denna ström på formen $\phi_+(x) = A \exp(ikx)$.

Lösning 3.1: Vågtalet blir

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{2mE/\hbar^2} = \sqrt{2 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 0.1 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} / (1.055 \cdot 10^{-34})^2} = \\ &= 1.6 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1} = 1.6 \text{ (nm)}^{-1}. \end{aligned}$$

Om vi räknar ut farten $v = \hbar k/m = 1.055 \cdot 10^{-34} \cdot 1.6 \cdot 10^9 / 9.11 \cdot 10^{-31} = 185291 \text{ ms}^{-1}$, vet vi att: '185291 m vågfunktion innehåller 500 elektroner'. Således blir normeringen

$$500 = \int_0^{185291} |\phi_+(x)|^2 dx = 185291 \cdot A^2 \Rightarrow A = 0.052 \text{ m}^{-1/2}$$

3.6 [Dator] I texten har vi givit ett approximativt uttryck för transmittansen vid tunneleffekten. Den effekt vi har försummat är interferensen mellan den infallande vågen och den våg som reflekteras vid 'bakkanten'. Denna effekt bör vara mycket liten eftersom endast en liten del av vågen penetrerar så långt in. Genom att ställa upp passningsvillkor både för fram- och bakkant av potentialsteget kan man få ett mer korrekt uttryck. Gör detta för potentialbarriären

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & 0 < x < a \\ 0, & x < 0, x > a \end{cases} .$$

Bestäm T genom att lösa Schrödingerekvationen för alla x . Plotta sedan $T = T(E)$ både för denna exakta lösning och för approximationen enligt läroboken sidan 57.

Lösning 3.6: I figur 1 har vi plottat den exakta formeln (med $K = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$)

$$T = \left(1 + \frac{V_0^2}{4|V_0 - E|E} |\sinh(Ka)|^2 \right)^{-1}, \quad (2)$$

samt approximationen (för $E < V_0$)

$$T \approx \frac{16(V_0 - E)E}{V_0^2} \exp(-2Ka), \quad (3)$$

som även återfinns i lärobokens facit på sidan 201 (observera skillnaden i notation för k och K).

Vi ger här en härledning av den exakta analytiska formeln (2), ett liknande förfarande kan även användas för att lösa uppgift **3.4 c)** analytiskt. Passning av vågfunktionen (jämför med uppgift **3.4** där vågfunktionen var oscillerande i alla områden)

$$\begin{cases} \Psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, & x < 0 \\ \Psi = Ce^{Kx} + De^{-Kx}, & 0 < x < a \\ \Psi = te^{ikx}, & a < x \end{cases}, \quad \begin{cases} k = \sqrt{2mE}/\hbar \\ K = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar \end{cases},$$

och dess derivata i punkterna $x = 0$ och $x = a$ leder till fyra ekvationer med

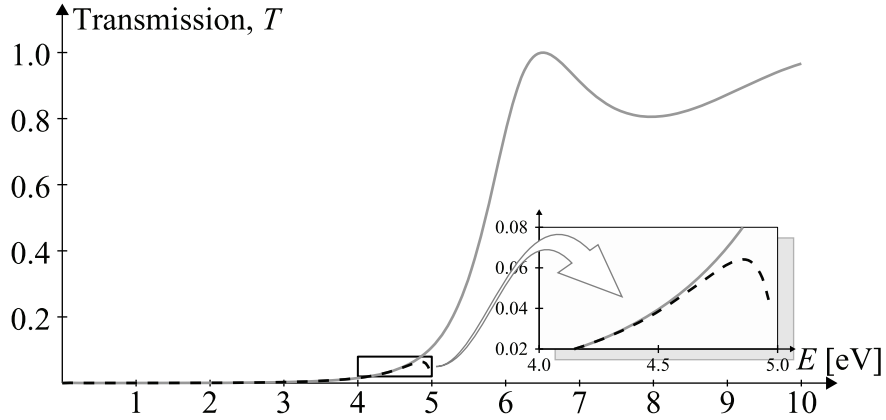


Figure 1: Heldragen kurva visar den exakta formeln (2) för transmittansen som funktion av energin ($V_0 = 5$ eV, $a = 0.5$ nm, $m = m_e$). Den streckade kurvan visar den approximativa formeln (3), vilken syns vara en god approximation i området $E < V_0$ då $Ka \gg 1$.

fem obekanta

$$\begin{cases} A \underbrace{e^{ik_0}}_1 + B \underbrace{e^{-ik_0}}_1 = C \underbrace{e^{K_0}}_1 + D \underbrace{e^{-K_0}}_1 \\ C e^{Ka} + D e^{-Ka} = t e^{ika} \\ A i k \underbrace{e^{ik_0}}_1 - B i k \underbrace{e^{-ik_0}}_1 = C K \underbrace{e^{K_0}}_1 - D K \underbrace{e^{-K_0}}_1 \\ C K e^{Ka} - D K e^{-Ka} = t i k e^{ika} \end{cases} \quad (4)$$

Efter att ha satt $A = 1$ (ekvivalent med att införa nya variabler $B' = B/A$ osv) kan vi mera kortfattat skriva ekvationssystemet (4) på matrisform med fyra obekanta, B, C, D och t , där den sökta transmittansen T sedan beräknas som $T = |t|^2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & e^{Ka} & e^{-Ka} & -e^{ika} \\ 1 & -iK/k & iK/k & 0 \\ 0 & K e^{Ka} & -K e^{-Ka} & -i k e^{ika} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ C \\ D \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Denna matrisekvation kan t.ex. lösas numeriskt med hjälp av dator. Den analytiska lösningen fås lämpligen med formell Gausselimination och då är matrisekvationen (5) ekvivalent med uppställningen

$$\left[\frac{1}{-ik} \cdot III \rightarrow II', II \rightarrow IV', \frac{1}{ik} \cdot IV \rightarrow III' \right],$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & \frac{K}{ik} & -\frac{K}{ik} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K}{ik}e^{Ka} & -\frac{K}{ik}e^{-Ka} & -e^{ika} & 0 \\ 0 & e^{Ka} & e^{-Ka} & -e^{ika} & 0 \end{array} \cdot$$

De romerska siffrorna inom den övre hakparantesen symboliserar operationer med olika radnummer i respektive steg. De följande eliminationsstegen lyder

$$\left[II - I \rightarrow II', \frac{K}{ik} \cdot IV - III \rightarrow IV' \right],$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{K}{ik} + 1 & -\frac{K}{ik} + 1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{K}{ik}e^{Ka} & -\frac{K}{ik}e^{-Ka} & -e^{ika} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2K}{ik}e^{-Ka} & \left(1 - \frac{K}{ik}\right)e^{ika} & 0 \end{array} \cdot,$$

$$\left[\left(\frac{K}{ik} + 1\right) \cdot III - \frac{K}{ik}e^{Ka} \cdot II \rightarrow III', \frac{1}{2} \cdot IV \rightarrow IV' \right],$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & & -1 \\ 0 & \frac{K}{ik} + 1 & & -\frac{K}{ik} + 1 \\ 0 & 0 & -\frac{K}{ik}e^{-Ka} \left(\left(\frac{K}{ik} + 1\right) + \left(1 - \frac{K}{ik}\right)e^{2Ka}\right) & \\ 0 & 0 & \frac{K}{ik}e^{-Ka} & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ 0 & 2 \\ -\left(\frac{K}{ik} + 1\right)e^{ika} & -\frac{2K}{ik}e^{Ka} \\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{K}{ik}\right)e^{ika} & 0 \end{array} \cdot$$

En sista elimination $\left[\left(\left(\frac{K}{ik} + 1\right) + \left(1 - \frac{K}{ik}\right)e^{2Ka}\right) \cdot IV + III \rightarrow IV'\right]$ leder då till en ekvation för den komplexa variabeln t

$$\begin{aligned} e^{ika} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{K}{ik}\right) \left[\left(\frac{K}{ik} + 1\right) + \left(1 - \frac{K}{ik}\right)e^{2Ka} \right] - \left(\frac{K}{ik} + 1\right) \right\} t \\ = -\frac{2K}{ik}e^{Ka}. \end{aligned} \quad (6)$$

Efter att ha multiplicerat med $-\frac{ik}{2K}e^{-Ka}$ i (6), gör vi följande omskrivningar av vänsterledet

$$\frac{1}{2}e^{ika} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{ik}{K}\right) \left(\left(\frac{K}{ik} + 1\right)e^{-Ka} + \left(1 - \frac{K}{ik}\right)e^{Ka} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(1 + \frac{ik}{K} \right) e^{-Ka} \Big\} t \\
& = \frac{1}{2} e^{ika} \left\{ 2 \cosh(Ka) + i \left(\frac{K^2 - k^2}{Kk} \right) \sinh(Ka) \right\} t.
\end{aligned}$$

Vi kan då beräkna transmittansen enligt följande, där vi först antar att K är reell ($E < V_0$)

$$\begin{aligned}
T = |t|^2 &= \frac{4}{\left| 2 \cosh(Ka) + i \left(\frac{K^2 - k^2}{Kk} \right) \sinh(Ka) \right|^2} \\
&= \frac{1}{\underbrace{\cosh^2(Ka)}_{1 + \sinh^2(Ka)} + \frac{(K^2 - k^2)^2}{4K^2 k^2} \sinh^2(Ka)} = \frac{1}{1 + \frac{(K^2 + k^2)^2}{4K^2 k^2} \sinh^2(Ka)}.
\end{aligned}$$

Genom att nu sätta in $K = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$ och $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ får vi

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4(V_0 - E)E} \sinh^2(Ka)}. \quad (7)$$

För fallet då $K = i|K|$ är imaginär ($E > V_0$) får vi

$$T = \frac{1}{1 + \frac{(k^2 - K^2)^2}{4K^2 k^2} \sinh^2(Ka)} = \frac{1}{1 - \frac{V_0^2}{4(V_0 - E)E} \sin^2(|K|a)}. \quad (8)$$

Vi kan sammanfatta de två dellösningarna (7) och (8) på formen given i ekvation (2).

Kommentar: Den approximativa formeln (3) som bara är av intresse då $E < V_0$ följer direkt ur en undersökning gränsvärdet då $Ka \gg 1$

$$T \sim \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4(V_0 - E)E} \frac{\exp(2Ka)}{4}} \sim \frac{16(V_0 - E)E}{V_0^2} \exp(-2Ka),$$

i överensstämmelse med sidan 57 i läroboken.

4.5 En partikel med massan m befinner sig i en ändlig potentialbrunn

$$V(x) = \begin{cases} -V_0, & |x| < b \\ 0, & |x| > b \end{cases}.$$

Man har valt konstanterna så att grundtillståndets energi är

$$E = -V_0/2.$$

- a) Ställ upp Schrödingerekvationen både i och utanför brunnen.
- b) Härled passningsvillkoret för $x = b$.
- c) Vilket samband måste råda mellan konstanterna b och V_0 i detta fall?
- d) Rita vågfunktionen.

Lösning 4.5 a): Grundtillståndets energi är given som $E = -V_0/2$. I brunnen gäller $V(x) = -V_0$, vilket ger följande (tidsberoende) Schrödingerekvation

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\phi'' - V_0\phi = -\frac{V_0}{2}\phi.$$

Utanför brunnen är $V(x) = 0$, vilket ger ekvationen

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\phi'' = -\frac{V_0}{2}\phi.$$

Lösning 4.5 b): Grundtillståndet har jämn paritet, således gäller (se sidan 74 i läroboken)

$$\tan\left(\sqrt{2mb^2(E+V_0)/\hbar^2}\right) = \sqrt{(-E)/(E+V_0)},$$

vilket ger med $E = -V_0/2$

$$\tan\left(\sqrt{mb^2V_0/\hbar^2}\right) = 1 \Rightarrow \sqrt{mb^2V_0/\hbar^2} = \pi/4. \quad (9)$$

Lösning 4.5 c): Sambandet mellan b och V_0 erhålls direkt ur (9) och blir

$$V_0b^2 = \frac{\pi^2\hbar^2}{16m}.$$

Lösning 4.5 d) Se figur 2.

4.8 [*] En partikel med massan m påverkas av potentialen

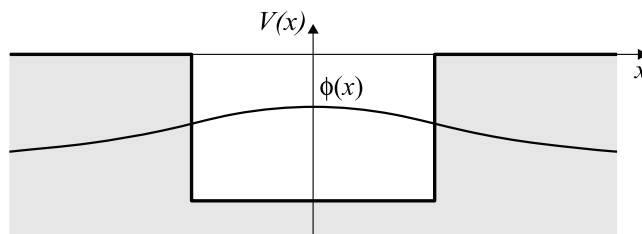


Figure 2: En skiss av vågfunktionen.

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ -V_0, & 0 < x < a \\ 0, & x > a \end{cases} .$$

a) Antag att det finns tre bundna tillstånd. Skissera vågfunktionerna för dessa tillstånd!

b) Ställ upp en relation ur vilken energierna för bundna tillstånd kan bestämmas.

c) För vissa värden på V_0 har partikeln bara ett bundet tillstånd. Bestäm dessa värden på V_0 .

Ledning: Vilket randvillkor ska gälla för $x = 0$? Jämför med den oändliga brunnen!

Lösning 4.8 a): Se figur 3.

Lösning 4.8 b): Vågfunktionen kan skrivas

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ A \sin(kx), & 0 < x < a \\ B e^{-\kappa x}, & x > a \end{cases} .$$

Passning av vågfunktionen och dess derivata i punkten $x = a$ (i punkten $x = 0$ får vi det vanliga villkoret på k för $E > -V_0$) ger

$$\begin{cases} A \sin(ka) = B e^{-\kappa a} \\ Ak \cos(ka) = -B \kappa e^{-\kappa a} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ak \cos(ka) = -\kappa A \sin(ka) \Rightarrow \tan(ka) = -\frac{k}{\kappa}. \quad (10)$$

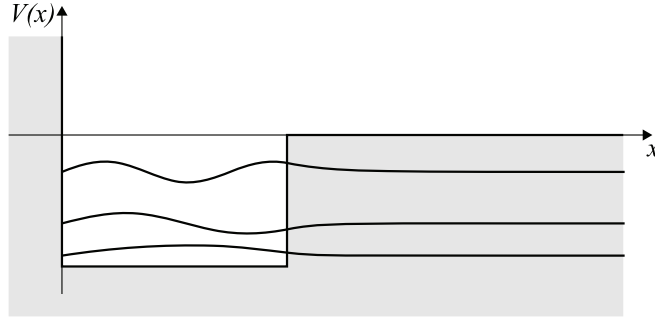


Figure 3: En skiss av de tre bundna vågfunktionerna.

Då vi har $\kappa = \sqrt{2m(-E)/\hbar^2}$ och $k = \sqrt{2m(E+V_0)/\hbar^2}$ gäller

$$k/\kappa = \sqrt{(E+V_0)/(-E)},$$

så att ekvation (10) ger

$$\tan\left(\sqrt{2ma^2(E+V_0)/\hbar^2}\right) = -\sqrt{(E+V_0)/(-E)}. \quad (11)$$

Kommentar: Inte helt oväntat (spegla vågfunktionen i x - och y -axeln) är denna formel identisk med villkoret för bundna udda tillstånd i en brunn med bredden $2a$, jämför med uppgift 4.4.

Lösning 4.8 c): I enlighet med kommentaren till uppgift b) svarar detta mot en ändlig brunn med bredden $2a$ som har två bundna tillstånd (varav ett är udda). I uppgift 4.7 gav vi ett exempel på detta, vi ger nu en allmän lösning. Att ekvation (11) skall ha precis en lösning i intervallet $-V_0 < E < 0$ betyder att tangensfunktionen i vänsterledet av (11) skall divergera precis en gång (högerledet i (11) är en monotont avtagande funktion som uppfyller $0 > -\sqrt{(E+V_0)/(-E)} > -\infty$ i det aktuella intervallet). Då det gäller att $|\tan(x)| \rightarrow \infty$ för $x = \pi/2 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, får vi från (11) villkoret att det för alla värden på E ($-V_0 < E < 0$) skall gälla att

$$\pi/2 < \sqrt{2ma^2(E+V_0)/\hbar^2} < 3\pi/2,$$

vilket svarar mot

$$\frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2} < V_0 < 9\frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2}.$$