Deltentamen i kvantformalism, atom och kärnfysik med tillämpningar för F3

08-10-20

Tid: kl 08.00-12.00.

Hjälpmedel: Det för kursen officiella formelbladet samt TeFyMa.

Poäng: Vid varje uppgift anges poängantal. För godkänt krävs minst 15 poäng. Logiskt uppställda, renskrivna och väl motiverade lösningar med tydligt markerade svar krävs.

1. Förenkla så långt som möjligt följande operator (4p)

$$[L_x, L_y L_z] + [L_x, L_z L_y] .$$

Ledning: Använd gärna Jacobis identitet.

2. I klassisk mekanik gäller för rörelsemängden $p_x = mv_x$, där m är massan och hastigheten $v_x = \dot{x}$ är tidsderivatan av läget x. I kvantmekaniken är p_x och x inte definierade som absoluta tal utan med sannolikhetsfördelningar, från vilka vi kan beräkna deras medelvärde $\langle x \rangle = \langle \psi | \hat{x} | \psi \rangle$ och $\langle p_x \rangle = \langle \psi | \hat{p}_x | \psi \rangle$ för ett givet tillstånd ψ.

a) Vad gäller för samband mellan $\langle x \rangle$ och $\langle p_x \rangle$ i kvantmekaniken? (2p)

b) Bevisa detta samband för ett godtyckligt tillstånd. (4p)

3. En partikel befinner sig i en endimensionell oändlig kvantbrunn med bredden a [vars egenfunktioner ges av $\phi_n = \sqrt{2/a}\ \sin(n\pi x/a)$]. Vid tiden $t = 0$ ges dess vågfunktion av (Ledning: rita!)

$$\Psi(x) = \begin{cases} N \sin(2\pi x/a) , & 0 \leq x \leq a/2 \\ 0, & x < 0 \ \textit{eller} \ x > a/2 \end{cases} .$$

Vid denna tidpunkt mäter man partikelns energi. Vad är sannolikheten att man får mätresultatet $E_2 = \hbar^2 \pi^2 2^2 / \left(2ma^2\right)$? (6p) (För full poäng krävs att man bestämmer N. Ledning: $\sin^2(\theta) = (1 - \cos(2\theta))/2$.)

VÄND!

4. Vid en given tidpunkt beskrivs tillståndet för en partikel i ett experiment i sfäriska koordinater av vågfunktionen (a_0 är en reell konstant)

$$\Psi = -\frac{1}{8\sqrt{\pi a_0^3}} \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{2a_0}} \sin(\theta)\, e^{i\varphi}.$$

a) Skriv om Ψ på formen 'radiell funktion' gånger 'klotytfunktioner' [d.v.s. $\Psi = f(r) \sum_{\ell,m} Y_\ell^m$]. (2p)

b) Vilka möjliga mätvärden kan erhållas vid experimentet då man mäter de fysikaliska storheter som i kvantmekaniken representeras av operatorerna $\mathbf{L}^2$ och L_z? (2p)

c) Vad är motsvarande sannolikheter? (2p)

5. Med utgångspunkt i en endimensionell s.k. harmonisk oscillatorpotential $V_{HO}(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$ (där m och ω är reella konstanter) lägger vi till en liten störning $V_\varepsilon(x) = \varepsilon x^4$ ($|\varepsilon| \ll 1$).

Givet nedan är (egen-) grundtillståndet (med index 0) och motsvarande (egen-) energi för den harmoniska oscillatorn (d.v.s. med $V = V_{HO}$)

$$\varphi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}, \;\; E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}.$$

a) Visa att φ_0 är normerad. (2p)

b) Genomför en första ordningens störningsräkning för tillståndet φ_0 i potentialen $V(x) = V_{HO} + V_\varepsilon$, och visa att energiskillnaden är $\Delta E_0 = 3\varepsilon/4$ när man sätter $\hbar = \omega = m = 1$ (uträkningarna skall redovisas med stor tydlighet). (4p)

c) En ändlig underrumsrepresentation H_ε av motsvarande Hamiltonoperator $\widehat{H}_\varepsilon = \widehat{H}_{kin} + V_{HO} + V_\varepsilon$ är (vi utnyttjar enheter där $\hbar = \omega = m = 1$)

$$\widehat{H}_\varepsilon \leftrightarrow H_\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \Delta E_0 & 0 & 3\varepsilon/\sqrt{2} \\ 0 & \frac{3}{2} + \Delta E_1 & 0 \\ 3\varepsilon/\sqrt{2} & 0 & \frac{5}{2} + \Delta E_2 \end{bmatrix}.$$

D.v.s. vi har utnyttjat de 3 lägsta egentillstånden till $\widehat{H}_{HO} = \widehat{H}_{kin} + V_{HO}$ för att ta fram denna $3 \times 3-$matris där $\Delta E_1 = 15\varepsilon/4$ och $\Delta E_2 = 39\varepsilon/4$.

Vad blir det näst lägsta energitillståndet (d.v.s. 1:a exciterade) för $\widehat{H}_\varepsilon$ i denna approximation? (2p)