Intro till Matte delen

Matte delen innehåller

- Linjära rum
- Skalärprodukt
- Projektion
- Gram-Schmidts metod
- Konvergens
- Operatorer

Dessa begrepp används i linjär algebra

Exempel

Rummet av alla vektorer (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$ kallas $\mathbb{R}^2$

Detta är ett linjärt rum ty:

$$u \in \mathbb{R}^2,\ v \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \begin{cases} u + v \in \mathbb{R}^2 \\ \lambda u \in \mathbb{R}^2, \ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Dvs genom att gånga med en konstant eller genom att addera vektorer kan vi ej gå utanför rummet.

En skalärprodukt ska uppfylla vissa regler

Ex $\langle u|u\rangle \geq 0$

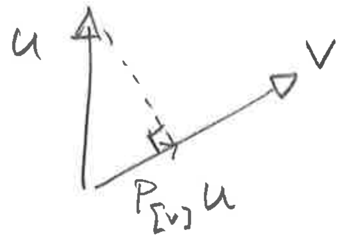
$\langle u|\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2\rangle = \lambda_1 \langle u|v_1\rangle + \lambda_2 \langle u|v_2\rangle$

I $\mathbb{R}^2$ kan vi tex välja

$u = (a_1, b_1)$
$v = (a_2, b_2)$
$\langle u|v\rangle = (a_1, b_1)\cdot(a_2, b_2) = a_1 a_2 + b_1 b_2$

Om reglerna är uppfyllda kan vi definera en projektion

$$P_{[v]} u = \left(\frac{\langle v|u\rangle}{\langle v|v\rangle}\right) v$$



och använda Gram-schmidt's metod:

Gissa 2 vektorer: $(2,0)$, $(1,1)$

$$\Rightarrow \text{G.S.} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = (2,0) \\ \varphi_2 = (1,1) - P_{(2,0)}(1,1) = (0,1) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ orthogonal bas för rummet $\begin{cases} (2,0) \\ (0,1) \end{cases}$

(ej normerad)

Med hjälp av en orthogonal bas kan vi utveckla en godtycklig vektor och vara säkra på att få <u>konvergens</u>

$u \in \mathbb{R}^2$

<u>ex</u> $u = (2,2)$

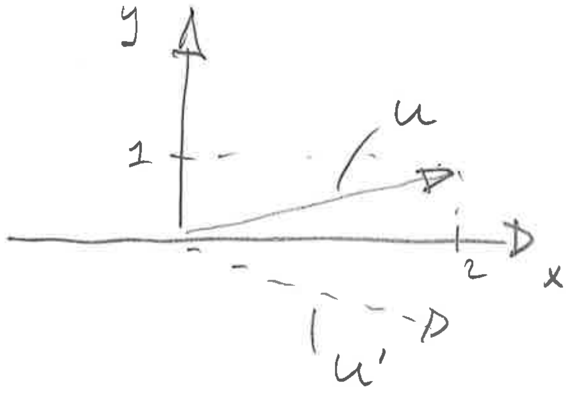
$$u = \sum_{n=1}^{2} c_n \varphi_n$$

$$u = 1\underbrace{(2,0)}_{\varphi_1} + 2\underbrace{(0,1)}_{\varphi_2}$$

<u>Operatorer</u>

Vad blir operatorn som speglar u i x-axeln?

<u>Ex</u> $u = (2,1)$



$$\overbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}}^{u'} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}^{\hat{A}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrisoperatorn $\hat{A}$ verkar på en vektor i rummet och avbildar på en ny vektor i samma rum.

$$\hat{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

Det nya och häftiga är att metoderna även funkar om vi tittar på <u>funktionsrum</u> istället för vektorrum.

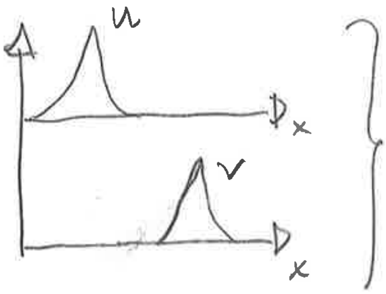
<u>Ex</u> Låt vårt rum vara:

udda, reella funktioner på intervallet $-\pi \le x \le \pi$

Vi kan definera en skalärprodukt:

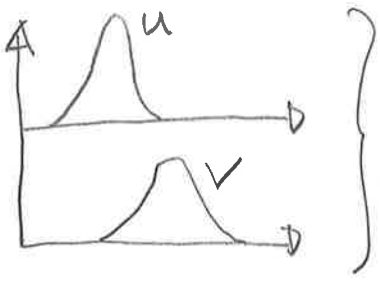
$$\langle u|v\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} u \cdot v \, dx$$

Egenskap: $\langle u|u\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} u^2 \, dx \ge 0$



$\Rightarrow \langle u|v\rangle = 0$

orthogonala funktioner



$\Rightarrow \langle u|v\rangle \neq 0$

lite överlappande funktioner

man kan finna en orthogonal bas för rummet:

$$\{\sin(x), \sin(2x), \sin(3x), \ldots\}$$

En annan bas är:

$\{x, x^3, x^5, \ldots\}$ men den är inte orthogonal.

En godtycklig funktion kan utvecklas:

$$u = c_1 \sin(x) + c_2 \sin(2x) + \ldots$$

(Fourierserie)

I funktionsrummet kan man konstruera operatorer:

$$v(x) = \int_I k(x,y)\, u(y)\, dy \quad \left(\begin{matrix}\text{faltnings}\\ \text{operator}\end{matrix}\right)$$

<u>ex</u> $k(x,y) = \delta(y-(x+1))$

$\Rightarrow v(x) = u(x+1)$ [Flytter funktionen 1 steg åt vänster]