Antalet tillstånd i en kvantmekanisk gas.

Här utgår vi från avsnittet om kvantbiljarder i "Kvantvärldens fenomen" sid 85 – 92. Först betraktar vi en atom i en makroskopisk volym.

Exempel: Betrakta en heliumatom i en kub med sidan 1 dm. Volymen är alltså 1 liter. Beräkna antalet tillstånd om energin är $\frac{3}{2}kT$ med $T = 300$ K (rumstemperatur). Antag vidare att vi känner energin med 1% onoggrannhet.

Tillståndstätheten ges av

$$g(E) = \frac{mV_{volym}}{2\pi^2\hbar^3}\sqrt{2mE}\,.$$

Antalet tillstånd $\Omega(E,\delta E) = g(E)\cdot\delta E$.

Enligt tabellen gäller att:

$k = 1.4\cdot 10^{-23}$ J/K, $m = 6.8\cdot 10^{-27}$ kg, $\hbar = 10^{-34}$ Js

Insättning ger (här gäller det enbart att räkna tiopotenser!)

$g(E) = 10^{56}\cdot 1/\mathrm{J}$ och $g(E)\delta E = g(E)E/100 = 10^{56}\cdot 10^{-23} = 10^{33}$ stycken tillstånd.

Det finns alltså en oerhörd mängd tillstånd i det givna energiintervallet. Uppenbart är att det är både principiellt och praktiskt omöjligt att precisera kvanttillståndet för en sådan partikel. Alla tillgängliga tillstånd är lika sannolika och Ω kommer att visa sig vara den intressanta fysikaliska storheten. Men vi har ju oftast inte en partikel i vår behållare utan snarare 10^{23} stycken. Vi ska nu

härleda ett approximativt uttryck för antalet tillstånd för en ideal kvantgas med många partiklar.

I behållaren finns N stycken partiklar som inte växelverkar med varandra. Vidare antar vi att vi inte behöver ta hänsyn till Pauliprincipen – mer om detta senare! För en partikel finns det $\Gamma(E)$ antal tillstånd med energi mindre än E. Uttrycket för Γ har härletts i kvantmekanikboken sid 91. Vad gäller för N partiklar? Eftersom de rör sig oberoende av varandra gäller multiplikationsprincipen:

$$\Gamma_{\text{system}}(U = E_1 + E_2 + \ldots + E_N) = \Gamma(E_1)\cdot\Gamma(E_2)\cdot\ldots\cdot\Gamma(E_N).$$

Vi betecknar partiklarnas totala energi med U eftersom den kan identifieras med systemets inre energi. För att komma vidare antar vi att alla partiklar har samma energi vilket är en förenkling men duger i detta sammanhang:

$$\Gamma_{\text{system}}(U) = cU^{3N/2} \approx \left(\Gamma(U/N)\right)^N = \frac{V^N}{(2\pi^2\hbar^3)^N}(2mU/N)^{3N/2}.$$

Detta är en oerhört snabbt växande funktion av U vilket gör att denna funktion har mycket speciella egenskaper. Denna funktion ger antalet tillstånd med energi lägre än U. För att beräkna antalet tillgängliga tillstånd för systemet antar vi att energin är given med en viss obestämdhet dvs vi vet att energin har ett värde i intervallet $[U, U-\delta U]$. Antalet tillstånd i detta energiintervall ges av:

$$\Omega[U, U-\delta U] = \Gamma(U) - \Gamma(U-\delta U).$$

Eftersom endast energiberoendet är intressant sätter vi $\Gamma_{\text{system}}(U) = cU^{3N/2}$ och får:

$$\Omega[U, U-\delta U] = cU^{3N/2} - c(U-\delta U)^{3N/2} = cU^{3N/2}(1-(1-\delta U/U)^{3N/2}).$$

Låt oss enbart studera termen $(1-\delta U/U)^{3N/2}$. Talet inom parentesen är alltid mindre än 1 och ska upphöjas till ett oerhört stort tal – $3N/2$. Resultatet blir ett oerhört litet tal som i alla tänkbara sammanhang kan sättas = 0. Alltså gäller i praktiken att Ω inte beror av δU ! Detta beror på att funktionen $\Gamma_{\text{system}}(U) = cU^{3N/2}$ är så snabbt växande att nästan alla tillstånd ligger nära U.

Identiska partiklar

Vi har i uttrycket för Ω inte tagit hänsyn till att kvantmekaniska partiklar är identiska. Detta innebär att en permutation av partiklarna inte ger ett nytt tillstånd. Eftersom antalet permutationer av N partiklar är $N!$ Måste vi dividera vårt uttryck med $N!$, alltså:

$$\Omega_{\text{system}}(U) \approx \frac{V^N}{N!\cdot(2\pi^2\hbar^3)^N}(2mU/N)^{3N/2}$$